11 класс

В варианте 6 задач, решения всех задач должны быть записаны подробно со всеми вычислениями, объяснениями и доказательствами. Задачи можно решать в любом порядке. Время выполнения задания 5 часов.

1. Можно ли расположить на плоскости 2010 лучей таким образом, чтобы ни через какую точку плоскости не проходило более двух лучей, каждый луч пересекался ровно с двумя другими и любые две точки на любых двух лучах можно было соединить ломаной, целиком содержащейся в объединении этих лучей?

2. Среди всех четверок натуральных чисел (k, l, m, n), $k > l > m > n$, найдите такую, что сумма $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ меньше единицы и ближе всего к ней.

3. С натуральным числом производится следующая операция: отбрасывается самая правая цифра его десятичной записи, после чего к полученному после ее отбрасывания числу прибавляется удвоенная отброшенная цифра. Например: $157 \mapsto 15 + 2 \times 7 = 29$, $5 \mapsto 0 + 2 \times 5 = 10$. Натуральное число называется хорошим, если после многократного применения этой операции получаемое число перестает меняться. Найдите наименьшее 100-значное хорошее число.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AA_1. H — точка пересечения высот треугольника ABC. Известно, что $AH = 3$, $A_1H = 2$, а радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 4. Найдите расстояние от центра этой окружности до H.

5. Пусть x — такое число из интервала $(\pi/2, \pi)$, что

$$\frac{4}{3}\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right) = 1.$$

Докажите, что число

$$\left(\frac{4}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x}\right)$$

целое и найдите его.

6. Через центр сферы радиуса $\sqrt{2}$ проведены 6 прямых, параллельных ребрам некоторого правильного тетраэдра. Точки пересечения этих прямых со сферой являются вершинами выпуклого многогранника. Вычислите объем и площадь поверхности этого многогранника.