

ОЛИМПИАДА

9 класс

9 класс

В варианте 6 задач, решения всех задач должны быть записаны подробно со всеми вычислениями, объяснениями и доказательствами. Задачи можно решать в любом порядке.

1. Можно ли на плоскости отметить 2010 точек таким образом, чтобы любой треугольник с вершинами в отмеченных точках был тупоугольным?

Ответ: Можно. Например, 2010 точек на одной полуокружности.

2. Эльфы считают шестизначное число счастливым, если сумма первых трех цифр отличается от суммы трех последних цифр на число, кратное одиннадцати. Сколько существует эльфийских шестизначных счастливых чисел?

Ответ: 81819 (это числа, делящиеся на 11).

3. Окружности S_1, S_2 и S_3 с центрами O_1, O_2 и O_3 проходят через точку F . Известно, что вторая точка пересечения окружностей S_2 и S_3 лежит на прямой FO_1 , а вторая точка пересечения окружностей S_1 и S_3 лежит на прямой FO_2 . Докажите, что вторая точка пересечения окружностей S_1 и S_2 лежит на прямой FO_3 .

Указание: Легко заметить, что FO_1 и FO_2 высоты, тогда и FO_3 высота, откуда следует требуемое.

4. Имеется $2n - 2$ доминошки размера 2×1 , каждая из которых раскрашена так, что один квадратик — черный, а другой — белый. Из них выкладывается рамка квадратной формы со стороной, длина которой n квадратиков (рис. 1). Сколько различных черно-белых орнаментов можно выложить таким образом? Орнаменты, совпадающие при повороте квадрата, считаются разными.

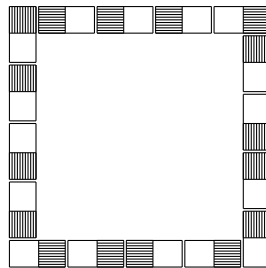


Рис. 1. Рамка из домино со стороной 9.

Ответ: $2^{2n-1} - 2$

5. Имеется набор из нескольких одинаковых кубиков, раскрашенных в черный и белый цвет (каждая грань окрашена в один цвет). Все кубики раскрашены по-разному, и, более того, если любые два кубика из этого набора как угодно положить на стол, то их можно отличить один от другого, не поднимая со стола, а сравнивая только раскраску видимых пяти граней. Какое наибольшее количество кубиков может быть в этом наборе?

Межрегиональная многопрофильная олимпиада ГУ-ВШЭ 2010.
МАТЕМАТИКА, 9 класс.

Ответ: 5 (раскраски: 6 черных граней, 2 противоположных белых грани, 3 белых грани с общей вершиной, 2 противоположных белых грани, 6 белых граней).

6. Если некоторое четырехзначное число умножить на число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, то получится восьмизначное число, у которого последние три цифры нули. Найдите все такие числа.

Ответ: 6125, 6375, 4625, 4875, 5216, 5736, 5264, 5784.