

**Демонстрационный вариант и методические рекомендации  
по профилю «Математическое моделирование»  
Олимпиады ГУ-ВШЭ для студентов и выпускников вузов**

Олимпиада для абитуриентов магистерской программы «Математическое моделирование» отделения прикладной математики и информатики ГУ-ВШЭ предполагает написание конкурсантами письменной работы по высшей математике. Время написания – **3 часа**.

Тематика письменной работы соответствует следующей программе.

Программа

**1. Линейная алгебра.**

1.1 Векторы, матрицы и действия с ними. Линейная зависимость системы векторов. Базис и размерность линейного пространства. Скалярное произведение.

1.2 Определитель квадратной матрицы. Вычисление определителей. Разложение определителя по строке и по столбцу. Транспонированная матрица. Обратная матрица. Ранг матрицы. Специальные виды матриц.

1.4 Системы линейных уравнений. Метод Крамера. Метод Гаусса. Фундаментальная система решений.

1.5 Линейные операторы над действительными и комплексными числами. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Жорданова форма линейного оператора.

1.6 Квадратичные формы. Матрица квадратичной формы. Условие положительной (отрицательной) определенности квадратичной формы. Критерий Сильвестра.

**2. Математический анализ.**

2.1 Множества. Операции над множествами. Числовые множества. Грани множеств. Множества в  $\mathbb{R}^n$ . Соответствие множеств. Счетные и несчетные множества.

2.2 Числовые последовательности и пределы. Свойства сходящихся последовательностей. Признаки существования предела. Первый и второй замечательные пределы.

2.2 Функции одной переменной. Производные. Исследование и построение графика функции.

2.3 Функции многих переменных. Частные производные. Полный дифференциал. Градиент функции. Производная по направлению. Матрица Гессе. Безусловный экстремум функции многих переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума функции многих переменных.

2.4 Понятие о квадратичных формах. Выпуклые функции и множества. Оптимизация при наличии ограничений. Функция Лагранжа и ее стационарные точки. Окаймленный Гессиан. Условия второго порядка. Метод множителей Лагранжа.

2.5 Неопределенный интеграл и его исчисление. Определенный интеграл. Несобственные интегралы. Кратные интегралы и их исчисление.

2.6 Понятие ряда и его сходимости. Свойства сходящихся рядов. Признаки сходимости положительных рядов. Знакопеременные ряды. Функциональные ряды. Равномерная сходимость функционального ряда. Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Ряды Тейлора и Маклорена.

**3. Дифференциальные уравнения.**

3.1 Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной. Понятие решения. Поле направлений. Изоклины. Интегральные кривые. Задачи Коши.

- 3.2 Уравнения в полных дифференциалах. Метод замены переменных. Интегрирующий множитель. Уравнения Бернулли и Риккати.
- 3.3 Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Метод вариации постоянной. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка.
- 3.4 Однородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Устойчивость решения по Ляпунову.
- 3.5. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и с правой частью в виде квазимногочлена.
- 3.6. Системы линейных дифференциальных уравнений. Фазовое пространство и фазовый портрет. Понятие устойчивости решений динамической системы. Устойчивость решений по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость.

#### **4. Теория вероятностей.**

- 4.1 Основные понятия теории вероятностей. Случайные события и случайные величины. Функция плотности распределения. Совместное распределение нескольких случайных величин. Условные распределения.
- 4.2 Характеристики распределений случайных величин (математическое ожидание, дисперсия, ковариация). Свойства математического ожидания и дисперсии. Условное математическое ожидание. Распределение дискретных случайных величин (биномиальное, геометрическое, распределение Пуассона).
- 4.3 Нормальное распределение и связанные с ним  $\chi^2$ -распределение, основные свойства.

#### **5. Математическая статистика.**

- 5.1. Генеральная совокупность и выборка. Выборочное распределение и выборочные характеристики (среднее, дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции). Корреляционная связь.
- 5.2. Статистическое оценивание. Точечные оценки. Линейность, несмещенность, эффективность и состоятельность оценок. Интервальные оценки, доверительный интервал. Метод моментов и метод наибольшего правдоподобия для точечной оценки параметров распределения.
- 5.3. Статистические выводы и проверка статистических гипотез. Ошибки 1-го и 2-го рода. Уровень доверия и проверка значимости.

#### **6. Множества, функции, отношения.**

- 6.1 Диаграммы Венна. Операции над множествами: объединение, пересечение, дополнение. Векторы, их проекции. Прямое произведение множеств.
- 6.2 Соответствия и их свойства. Взаимно-однозначные соответствия. Понятие функции. Обратные функции. Суперпозиции и формулы. Способы задания функций.
- 6.3 Общее понятие отношения. Бинарные отношения и их свойства (рефлексивность, симметричность, транзитивность). Отношение эквивалентности. Отношение частичного порядка. Линейный порядок. Строгий порядок.

#### **7. Математическая логика**

- 7.1 Основные понятия логики: высказывания и рассуждения. Основные логические связки. Алгебра высказываний. Логические функции и способы их задания - таблицы и формулы.
- 7.2 Алгебраический подход к логике. Функциональная полнота. Булева алгебра и ее законы. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Алгебра Жегалкина. Линейные и монотонные функции. Функциональная полнота.
- 7.3 Логика предикатов первого порядка. Правильно построенная формула. Аксиомы и правила вывода. Выводимость. Интерпретация. Выполнимость. Общезначимость. Теорема дедукции. Теорема о полноте. Логические теории.

## **8. Теория графов**

8.1 Неориентированные и ориентированные графы, мультиграфы. Смежность и инцидентность. Способы представления графов. Матрица смежности. Графы и бинарные отношения. Изоморфизм графов. Полные графы и клики.

8.2 Пути, циклы, цепи, простые цепи. Связность и расстояния. Центр, радиус, диаметр графа. Обходы графов. Ациклические графы и топологическая сортировка. Матрицы графов и операции над ними.

8.3 Двудольные графы. Паросочетания. Деревья и их свойства.

**Для подготовки к олимпиаде рекомендуются следующие учебные пособия:**

1. Ильин В.А. Линейная алгебра.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа.
4. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ, т. 1,2.
5. Фихтенгольц Г.М. Основы дифференциального и интегрального исчисления, т.1-3.
6. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. Под редакцией Б.П. Демидовича.
7. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
8. Филипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.
9. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей.
10. Крамер Г. Математические методы статистики.
11. Шведов А.С. Теория вероятностей и математическая статистика.
12. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера.
13. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов.
14. Оре О. Теория графов.

**Задание по олимпиаде для поступающих  
в магистратуру ГУ-ВШЭ по программе  
“Математическое моделирование”  
(Отделение прикладной математики и  
информатики)**

1. (5 баллов) Найдите первый ненулевой член в разложении в ряд Тейлора в точке 0 функции  $\sin(\operatorname{arctg} x) - \operatorname{arctg}(\sin x)$ .

2. (6 баллов) Известно, что матрица  $A$  размера  $3 \times 3$  имеет 3 различных собственных значения, ее определитель равен 1, а сумма собственных значений самой матрицы и сумма собственных значений матрицы  $A^2$  равны 0. Найдите сумму собственных значений матрицы  $A^3$ .

3. Общество из  $n$  членов выбирает из своего состава одного представителя.

а) (2 балла) Сколькими способами может пройти открытое голосование, если каждый голосует за одного человека (быть может, и за себя)?

б) (2 балла) Тот же вопрос, если голосование – тайное, т.е. учитывается лишь число голосов, поданных за каждого кандидата, и не учитывается, кто за кого голосовал персонально.

4. (5 баллов) Найдите решение дифференциального уравнения  $y' = 4xy - 2xy^2$ , удовлетворяющее условию  $y(1) = 2$ .

5. (4 балла) Найдите максимумы и минимумы функции  $2x^2 - 3xy - 2y^2$  при ограничении  $x^2 + y^2 = 10$ .

6. (4 балла) Найти вероятность того, что в хорошо перетасованной колоде из 36 карт все 4 туза окажутся рядом.

7. (9 баллов) Квадратная матрица  $A$  с действительными элементами удовлетворяет уравнению

$$A^2 - 2A + 4E = 0,$$

где  $E$  – единичная матрица того же порядка, что и  $A$ .

а) (3 балла) Найдите  $\det(A)$ .

б) (6 баллов) Каким может быть порядок матрицы  $A$ ?

8. (7 баллов) Все элементы матрицы  $A$  размера  $5 \times 5$  равны 1 и -1. Найдите все решения системы уравнений

$$AX = (1/2)X,$$

где  $X \in \mathbb{R}^5$ .

9. (8 баллов) В плоском двусвязном графе 7 граней (считая внешней) – 3 треугольника,

3 четырехугольника и 5-угольник. Сколько в этом графе ребер? А вершин?

10. (8 баллов) Какие из приведенных ниже графов изоморфны? Докажите, что приведенные Вами пары действительно изоморфны, а любые другие – нет.

