Некоммерческая организация «Ассоциация московских вузов»

Государственное образовательное бюджетное учреждения высшего профессионального образования
«Государственный университет – Высшая школа экономики»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор
_____________ В.В. Радаев
«___»___________ 2010 г.

Отчет:
«Подготовка и проведение Межрегиональной многопрофильной олимпиады школьников ГУ-ВШЭ в 2010 году»

(мероприятие № 49.1.1.4 договора от 01.11.2010 № 49)

Руководитель мероприятия:
Директор Дирекции по профессиональной ориентации и работе с одаренными учащимися Т.А. Протасевич

**Состав методической комиссии олимпиады по математикке**

Декан факультета математики, заведующий кафедрой дискретной математики факультета математики ГУ-ВШЭ Ландо С. К.;
Профессор кафедры дискретной математики факультета математики ГУ-ВШЭ Артамкин И.В.;
Профессор кафедры высшей математики на факультете экономики ГУ-ВШЭ Быков А.А.;
Доцент кафедры высшей математики на факультете экономики ГУ-ВШЭ Богатая С. И.;
Доцент кафедры дискретной математики факультета математики ГУ-ВШЭ Зыкин А.И.;
Доцент кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета Казанского государственного университета им. В.И. Ульянова-Ленина Киясов С.Н. (по согласованию);
Доцент кафедры "Высшая математика-2" Института фундаментальной подготовки Сибирского федерального университета Кравцова О.В. (по согласованию);
Доцент кафедры геометрии и топологии факультета математики ГУ-ВШЭ Рыбников Г.Л.;
Доцент механико-математического факультета Томского государственного университета Соколов Б.В. (по согласованию);
Доцент кафедры геометрии и топологии факультета математики ГУ-ВШЭ Тиморин В.А. (по согласованию);
Доцент кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Казанского государственного университета им. В.И. Ульянова-Ленина Турилова Е.А. (по согласованию);
Старший преподаватель кафедры высшей математики на факультете экономики ГУ-ВШЭ Козин Н.Е.;
Старший преподаватель кафедры математического анализа и теории функций факультета физико-математических и естественных наук Российского университета дружбы народов Лисица А.Ю. (по согласованию);
Преподаватель кафедры высшей математики на факультете экономики ГУ-ВШЭ Погорельский К.Б.;
Преподаватель кафедры высшей математики на факультете экономики ГУ-ВШЭ Шварц Д.А..

# Межрегиональная многопрофильная олимпиада школьников ГУ-ВШЭ по математике

Задания

для учащихся 9-го класса

Межрегиональная многопрофильная олимпиада ГУ-ВШЭ 2010.
МАТЕМАТИКА, 9 класс.

# 9 класс

*В варианте 6 задач, решения всех задач должны быть записаны подробно со всеми вычислениями, объяснениями и доказательствами. Задачи можно решать в любом порядке.*

1. Можно ли на плоскости отметить 2010 точек таким образом, чтобы любой треугольник с вершинами в отмеченных точках был тупоугольным?

2. Эльфы считают шестизначное число счастливым, если сумма первых трех цифр отличается от суммы трех последних цифр на число, кратное одиннадацати. Сколько существует эльфийских шестизначных счастливых чисел?

3. Окружности $S_1, S_2$ и $S_3$ с центрами $O_1, O_2$ и $O_3$ проходят через точку $F$. Известно, что вторая точка пересечения окружностей $S_2$ и $S_3$ лежит на прямой $FO_1$, а вторая точка пересечения окружностей $S_1$ и $S_3$ лежит на прямой $FO_2$. Докажите, что вторая точка пересечения окружностей $S_1$ и $S_2$ лежит на прямой $FO_3$.

4. Имеется $2n-2$ доминошки размера $2 \times 1$, каждая из которых раскрашена так, что один квадратик — черный, а другой — белый. Из них выкладывается рамка квадратной формы со стороной, длина которой $n$ квадратиков (рис. 1). Сколько различных черно-белых орнаментов можно выложить таким образом? Орнаменты, совпадающие при повороте квадрата, считаются разными.

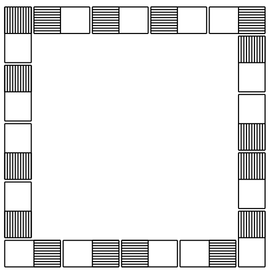


Рис. 1. Рамка из домино со стороной 9.

5. Имеется набор из нескольких одинаковых кубиков, раскрашенных в черный и белый цвет (каждая грань окрашена в один цвет). Все кубики раскрашены по-разному, и, более того, если любые два кубика из этого набора как угодно положить на стол, то их можно отличить один от другого, не поднимая со стола, а сравнивая только раскраску видимых пяти граней. Какое наибольшее количество кубиков может быть в этом наборе?

6. Если некоторое четырехзначное число умножить на число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, то получится восьмизначное число, у которого последние три цифры нули. Найдите все такие числа.

# Межрегиональная многопрофильная олимпиада школьников ГУ-ВШЭ по математике

Задания
для учащихся 10-го класса

Межрегиональная многопрофильная олимпиада ГУ-ВШЭ 2010.
МАТЕМАТИКА, 10 класс.

# 10 класс

*В варианте 6 задач, решения всех задач должны быть записаны подробно со всеми вычислениями, объяснениями и доказательствами. Задачи можно решать в любом порядке.*

1. Можно ли на плоскости отметить 2010 точек таким образом, чтобы любой треугольник с вершинами в отмеченных точках был тупоугольным?

2. Имеется $2n-2$ доминошки размера $2\times 1$, каждая из которых раскрашена так, что один квадратик — черный, а другой — белый. Из них выкладывается рамка квадратной формы со стороной, длина которой $n$ квадратиков (рис. 1). Сколько различных черно-белых орнаментов можно выложить таким образом? Орнаменты, совпадающие при повороте квадрата, считаются разными.

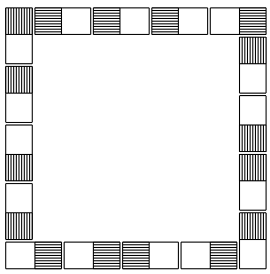


Рис. 1. Рамка из домино со стороной 9.

3. Окружности $S_1, S_2$ и $S_3$ с центрами $O_1, O_2$ и $O_3$ проходят через точку $F$. Известно, что вторая точка пересечения окружностей $S_2$ и $S_3$ лежит на прямой $FO_1$, а вторая точка пересечения окружностей $S_1$ и $S_3$ лежит на прямой $FO_2$. Докажите, что вторая точка пересечения окружностей $S_1$ и $S_2$ лежит на прямой $FO_3$.

4. Докажите, что если $m$ и $n$ — различные натуральные числа, то числа $2^{2^m}+1$ и $2^{2^n}+1$ не имеют общих делителей.

5. Двусторонняя линейка позволяет проводить прямую через две данные точки, а также прямую, параллельную данной, на расстоянии 3см. Разделите отрезок на три равные части при помощи двусторонней линейки, не пользуясь циркулем.

6. На плоскости дана декартова система координат. Существует ли окружность, на которой лежит ровно одна точка с рациональными координатами?

# Межрегиональная многопрофильная олимпиада школьников ГУ-ВШЭ по математике

Задания
для учащихся 11-го класса
(заключительный этап)

# 11 класс

*В варианте 6 задач; решения должны быть записаны подробно со всеми вычислениями, объяснениями и доказательствами. Задачи можно решать в любом порядке. Время выполнения задания 4 часа.*

1. Можно ли расположить на плоскости 2010 лучей таким образом, чтобы ни через какую точку плоскости не проходило более двух лучей, каждый луч пересекался ровно с двумя другими и любые две точки на любых двух лучах можно было соединить ломаной, целиком содержащейся в объединении этих лучей?

2. Среди всех четверок натуральных чисел $(k, l, m, n)$, $k > l > m > n$, найдите такую, что сумма $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ меньше единицы и ближе всего к ней.

3. С натуральным числом производится следующая операция: отбрасывается самая правая цифра его десятичной записи, после чего к полученному после ее отбрасывания числу прибавляется удвоенная отброшенная цифра. Например: $157 \mapsto 15 + 2 \times 7 = 29$, $5 \mapsto 0 + 2 \times 5 = 10$. Натуральное число называется хорошим, если после многократного применения этой операции получаемое число перестает меняться. Найдите наименьшее 100-значное хорошее число.

4. В остроугольном треугольнике $ABC$ проведена высота $AA_1$. $H$ — точка пересечения высот треугольника $ABC$. Известно, что $AH = 3$, $A_1H = 2$, а радиус описанной около треугольника $ABC$ окружности равен 4. Найдите расстояние от центра этой окружности до $H$.

5. Пусть $x$ — такое число из интервала $(\pi/2, \pi)$, что

$$\frac{4}{3}\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right) = 1.$$

Докажите, что число

$$\left(\frac{4}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x}\right)$$

целое и найдите его.

6. Через центр сферы радиуса $\sqrt{2}$ проведены 6 прямых, параллельных ребрам некоторого правильного тетраэдра. Точки пересечения этих прямых со сферой являются вершинами выпуклого многогранника. Вычислите объем и площадь поверхности этого многогранника.

# Решения задач
# 11 класс

1. Можно ли расположить на плоскости 2010 лучей таким образом, чтобы ни через какую точку плоскости не проходило более двух лучей, каждый луч пересекался ровно с двумя другими и любые две точки на любых двух лучах можно было соединить ломаной, целиком содержащейся в объединении этих лучей?

*Решение.* Это можно сделать. Вот одна из возможных конструкций. Если $A_1A_2 \dots A_{2010}$ — правильный 2010-угольник, то набор лучей $A_1A_2,\ A_2A_3, \dots A_{2010}A_1$ удовлетворяет условию задачи. В самом деле, для любой пары точек $M \in A_kA_{k+1}$, $N \in A_lA_{l+1}$, где $k < l$, ломаная $MA_{k+1}A_{k+2} \dots A_lN$ целиком лежит в объединении данных 2010 лучей. Докажем, что луч $A_kA_{k+1}$ пересекается только с двумя соседними лучами. Действительно, без ограничения общности можно считать, что $k = 1$. Тогда, если $1005 < l < 2010$, то луч $A_1A_2$ полностью лежит в одной полуплоскости относительно прямой $A_lA_{l+1}$, а, если $2 < l \leq 1005$, то луч $A_lA_{l+1}$ полностью лежит в одной полуплоскости относительно прямой $A_1A_2$. Следовательно, луч $A_1A_2$ пересекается только с лучами $A_2A_3$ и $A_{2010}A_1$. *Ответ:* Можно.

2. Среди всех четверок натуральных чисел $(k, l, m, n)$, $k > l > m > n$, найдите такую, что сумма $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ меньше единицы и ближе всего к ней.

*Решение.* Во-первых, заметим, что при помощи "жадного алгоритма" (то есть выбирая последовательно числа $n$, $m$, $l$, $k$ максимально возможными), получаем четверку $(43, 7, 3, 2)$:

$$1/43 + 1/7 + 1/3 + 1/2 = 1805/1806.$$

Таким образом, для искомой четверки $(k, l, m, n)$, имеем $1/k + 1/l + 1/m + 1/n \geq 1805/1806$. Левая часть этого неравенства оценивается сверху как $4/n$. Следовательно, $n \leq 3$, то есть $n = 2$ или $n = 3$.

Предположим, что $n = 3$. Тогда $3/m \geq 1805/1806 - 1/3$, то есть $m \leq 4$. Значит, $m = 4$. Далее, $2/l \geq 1805/1806 - 1/3 - 1/4$, то есть $l \leq 4$, противоречие.

Таким образом, $n = 2$. Допустим, $m = 4$. Тогда $2/l \geq 1805/1806 - 1/2 - 1/4$, то есть $l \leq 8$. Кроме того $l \geq 5$ (так как $l > m$) и $1/k \geq 1805/1806 - 1/2 - 1/4 - 1/5$, то есть $k \leq 20$. Это значит, что $klmn \leq 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 20 = 1280 < 1806$, то есть

$$1 - (1/k + 1/l + 1/m + 1/n) \geq 1/(klmn) \geq 1/1280 > 1/1806,$$

и четверка $(k, l, m, n)$ не оптимальна.

Допустим, $m \geq 5$. В любом случае, $3/m \geq 1805/1806 - 1/2$, то есть $m \leq 6$. Тогда $2/l \geq 1805/1806 - 1/2 - 1/5$, то есть $l \leq 6$. Кроме того, $l \geq 6$ (т.к. $l > m$) и $1/k \geq$

$1805/1806 - 1/2 - 1/5 - 1/6$, то есть $k \leq 7$, и $klmn \leq 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7 = 504 < 1806$. Отсюда аналогичным образом заключаем, что четверка $(k, l, m, n)$ не оптимальна.

Остается случай $m = 3$. Тогда $2/l \geq 1805/1806 - 1/2 - 1/3$, то есть $l \leq 12$. Если $l \geq 8$, то $1/k \geq 1805/1806 - 1/2 - 1/3 - 1/8$, то есть $k \leq 24$. Получаем $klmn \leq 2 \cdot 3 \cdot 12 \cdot 24 = 1728 < 1806$, а это значит, что четверка не оптимальна. Следовательно, $l = 7$ и $k = 43$, то есть оптимальная четверка была найдена с самого начала.
*Ответ:* $(2, 3, 7, 43)$.

3. С натуральным числом производится следующая операция: отбрасывается самая правая цифра его десятичной записи, после чего к полученному после ее отбрасывания числу прибавляется удвоенная отброшенная цифра. Например: $157 \mapsto 15 + 2 \times 7 = 29$, $5 \mapsto 0 + 2 \times 5 = 10$. Натуральное число называется хорошим, если после многократного применения этой операции получаемое число перестает меняться. Найдите наименьшее 100-значное хорошее число.

*Решение.* Во-первых, заметим, что числа от 1 до 18 не являются хорошими, поскольку описанное преобразование переводит их друг в друга по циклу:

$$1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 16 \to 13 \to 7 \to 14 \to 9 \to 18 \to 17 \to 15 \to 11 \to 3 \to 6 \to 12 \to 5 \to 10 \to 1.$$

Число 19, напротив, является хорошим. Значит, любое число, из которого в результате нескольких преобразований получается 19, также является хорошим.

Наименьшее 100-значное число — это $10^{99}$. Ясно, что оно не является хорошим, т.к. преобразование, применённое 99 раз, переводит его в единицу.

Теперь рассмотрим следующее за ним число, $10^{99} + 1 = 100\ldots001$ (всего 98 нулей). Несложно проверить непосредственно, что оно хорошее. Действительно, преобразование, применённое 90 раз (т.е. пять циклов длины 18), переведёт его в число 1000000001. Далее,

$$1000000001 \to 100000002 \to 10000004 \to 1000008 \to 100016 \to 10013 \to 1007 \to 114 \to 19.$$

Значит, $10^{99} + 1$ и есть наименьшее хорошее стозначное число.
*Ответ:* $10^{99} + 1$.

4. В остроугольном треугольнике $ABC$ проведена высота $AA_1$. $H$ — точка пересечения высот треугольника $ABC$. Известно, что $AH = 3$, $A_1H = 2$, а радиус описанной около треугольника $ABC$ окружности равен 4. Найдите расстояние от центра этой окружности до $H$.

*Решение.* Проведем в треугольнике высоты $BB_1$ и $CC_1$. Тогда четырехугольник $AC_1HB_1$ вписанный, поскольку его противоположные углы $C_1$ и $B_1$ прямые. Значит: $\angle BHC = \angle C_1HB_1 = 180^\circ - \angle C_1AB_1$. Отразим точку $H$ симметрично относительно прямой $BC$ и обозначим получившуюся точку через $H_1$. Тогда $\angle BH_1C = \angle BHC = 180^\circ - \angle C_1AB_1$, стало быть, четырехугольник $BACH_1$ вписанный и точка $H_1$ лежит на окружности, описанной около треугольника $ABC$. Обозначим центр этой окружности через $O$.

По построению имеем $H_1A_1 = HA_1 = 2$, следовательно, в равнобедренном треугольнике $OAH_1$ основание $AH_1$ равно $3 + 2 + 2 = 7$, а боковая сторона равна радиусу окружности: то есть 4. Высота, опущенная на основание, равна

$$\sqrt{4^2 - (7/2)^2} = \sqrt{15}/2,$$

а расстояние от основания $O_1$ этой высоты до $H$ равно $AH_1/2 - AH = 7/2 - 3 = 1/2$. Следовательно,

$$OH = \sqrt{OO_1^2 + O_1H^2} = \sqrt{(\sqrt{15}/2)^2 + (1/2)^2} = 2.$$

*Ответ:* 2.

5. Пусть $x$ — такое число из интервала $(\pi/2, \pi)$, что

$$\frac{4}{3}\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right) = 1.$$

Докажите, что число

$$\left(\frac{4}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x}\right)$$

целое и найдите его.

*Решение.* Для краткости, введем обозначения $s = \sin x$, $c = \cos x$. Найдем число $t = 1/cs$. Для этого возведем соотношение $(s^{-1}+c^{-1}) = 3/4$ в квадрат. Получим $s^2+c^2+2cs = 9(cs)^2/16$. Учитывая, что $s^2 + c^2 = 1$, получаем такое квадратное уравнение на $t$:

$$t^2 + 2t - 9/16 = 0.$$

Это уравнение имеет два решения $1/4$ и $-9/4$. Поскольку $cs$ должно быть отрицательно, получаем $t = -9/4$.

Рассмотрим последовательность $A_n = (4/3)^n(s^{-n} + c^{-n})$. Выведем рекуррентное соотношение для чисел $A_n$.

$$A_n = \frac{4^{n+1}}{3^{n+1}}\left(s^{-1} + c^{-1}\right)\left(s^{-n} + c^{-n}\right) =$$

$$= A_{n+1} + \frac{4^2}{3^2cs}A_{n-1} = A_{n+1} - 4A_{n-1}.$$

Таким образом, $A_{n+1} = A_n + 4A_{n-1}$ Пользуясь тем, что $A_0 = 2$, $A_1 = 1$, находим последующие $A_n$ из рекуррентного соотношения:

$$A_2 = 9,\ A_3 = 13,\ A_4 = 49.$$

*Ответ:* 49.

6. Через центр сферы радиуса $\sqrt{2}$ проведены 6 прямых, параллельных ребрам некоторого правильного тетраэдра. Точки пересечения этих прямых со сферой являются вершинами выпуклого многогранника. Вычислите объем и площадь поверхности этого многогранника.

*Решение.* Обозначим начальный тетраэдр через $T$. У тетраэдра $T$ 6 ребер, поэтому 6 прямых пересекают сферу в 12 точках. Следовательно, у нашего многогранника, который мы обозначим через $M$, 12 вершин. Поскольку все прямые проходят через центр сферы, многогранник $M$ центально симметричен относительно центра сферы $O$.

Рассмотрим три прямые, параллельные трем ребрам тетраэдра $T$, проходящим через фиксированную вершину $A$ тетраэдра $T$. Выберем на каждой из них направление, соответствующее продолжению соответствующего ребра тетраэдра за вершину $A$ и рассмотрим три луча, выходящие из центра сферы в указанных направлениях. Эти лучи попарно составляют друг с другом угол $60^\circ$, поэтому три точки их пересечения со сферой вместе с центром сферы являются вершинами правильного тетраэдра, сторона которого равна радиусу сферы. Грань этого тетраэдра, образованная тремя лежащими на сфере вершинами, является, очевидно, гранью нашего многогранника.

При рассмотрении трех лучей, дополнительных к описанным выше, мы получим еще один тетраэдр, центрально-симметричный только что описанному, и, соответственно, еще одну треугольную грань нашего многогранника.

Проделывая то же самое с каждой вершиной тетраэдра $T$, мы получим в результате 8 правильных тетраэдов, содержащихся в нашем многограннике, и, соответственно, 8 его граней, являющихся правильными треугольниками. Объем каждого такого тетраэдра равен, как нетрудно посчитать, $1/3$, а площадь одной грани, соответственно, $\sqrt{3}/2$. Следовательно, вклад найденных тетраэдров в объем многогранника равен $8/3$, а в площадь поверхности, соответственно, $4\sqrt{3}$.

Зафиксируем теперь какое-нибудь ребро $a$ тетраэдра $T$. Рассмотрим теперь четыре проходящих через центр сферы луча, параллельных четырем ребрам тетраэдра, смежным с ребром $a$. (Как и в первом рассмотрении, выберем на каждом из них направление, соответствующее продолжению соответствующего ребра тетраэдра за вершину, принадлежащую ребру $a$.) Очевидно, эти четыре луча пересекают сферу в четырех точках, образующих вместе с центром сферы правильную четырехугольную пирамиду, основание которой является гранью нашего многогранника. Как нетрудно подсчитать, площадь основания равна 2, а объем пирамиды, соответственно, $2/3$.

Количество таких четырехугольных пирамид равно числу ребер, т.е. 6, поэтому вклад их в объем равен 4, а вклад в площадь поверхности, соответственно, 12.

Осталось убедиться в том, что эти 8 тетраэдров и 6 четырехугольных пирамид исчерпывают наш многогранник. (Очевидно, что все эти 14 пирамид попарно пересекаются только по границе.) Это проще всего сделать, нарисовав его эскиз. Заметим сначала, что три прямые, параллельные трем ребрам основания начального тетраэдра, лежат в одной плоскости $\alpha$, которая рассекает наш многогранник по правильному шестиугольнику, вписанному в окружность большого круга, по которой плоскость $\alpha$ рассекает сферу. Этот шестиугольник делит наш многогранник на две центрально-симметричные части, поэтому достаточно нарисовать эскиз одной из двух половин. На верхней полусфере имеется еще только три вершины многогранника, образующие треугольную грань $b$, полученную описанной выше конструкцией. Легко видеть, что грань $b$ параллельна плоскости сечения $\alpha$, и над плоскостью $\alpha$ находятся еще ровно три такие грани, каждая из которых образована одной вершиной грани $b$ и двумя ближайшими к ней смежными вершинами шестиугольника. Остальные три грани, образованные одной стороной треугольной грани $b$ и одной параллельной ей стороной шестиугольника — квадраты, являющиеся основаниями описанных выше четырехугольных пирамид.

Следовательно, мы исчерпали весь многогранник $M$, так что его объем равен $12 + 4\sqrt{3}$, а площадь поверхности $4 + 8/3 = 12/3$.
*Ответ:* Объем равен $12 + 4\sqrt{3}$, площадь поверхности равна $4 + 8/3 = 12/3$.

Вариант 1

Задания 1-10

**1.** Найдите значение параметра $p$, при котором сумма квадратов всех различных корней уравнения $x^3-(p+2)x^2+4px-2xp^2=0$ принимает наименьшее возможное значение.

**2.** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции
$f(x)=3\cos^4 x-14\cos^3 x-21\sin^2 x-12\cos x$.

**3.** Решите неравенство $\log_{0{,}1x^2-1{,}1x+2{,}8}\dfrac{x^3-14x^2+40x}{15}\leqslant 1$.

**4.** Для защиты ценного оборудования от непогоды требуется изготовить палатку в форме пирамиды, в основании которой должен лежать прямоугольник, а одно из боковых ребер должно быть перпендикулярно основанию. Найдите наибольший возможный объем палатки при условии, что ни одно из ребер пирамиды не должно быть длиннее 2 метров.

**5.** В начале года предприниматель взял на год кредит в банке $\mathcal{A}$ на 80% требуемой ему суммы под $n\%$ годовых, остальные деньги занял на год в банке $\mathcal{B}$ под $3n\%$ годовых. Однако из—за кризиса в конце года расплатиться не смог и ему пришлось продлить договор в каждом банке еще на год, причем банк $\mathcal{A}$ установил ему на второй год $2n\%$ годовых, а банк $\mathcal{B}$ установил $4n\%$ годовых. В результате он вернул через два года всего 1440 у.е., в то время как планировал вернуть через год 960 у.е. Найдите величину вклада и банковский процент в каждом банке.

**6.** Найдите все значения параметров $p$ и $q$, при которых система
$\begin{cases} y=px^2-q, \\ 2y+\big||6x|-3|y|\big|=12 \end{cases}$ имеет ровно три решения.

**7.** На стороне $AB$ треугольника $ABC$ взята точка $D$. В треугольнике $ADC$ проведены биссектрисы $AP$ и $CQ$. На стороне $AC$ треугольника $ADC$ взята точка $R$ так, что $PR\perp CQ$. Известно, что биссектриса угла $D$ треугольника $BCD$ перпендикулярна отрезку $PB$, $AB=18$, $AP=12$. Найдите $AR$.

**8.** Найдите все точки минимума и точки максимума функции
$f(x)=(x^2-3x-9)\cdot\sqrt{x^2-6x+9}$.

**9.** Найдите все значения переменных $x>0$, $y>0$ такие, что хотя бы при одном значении $z$ верны одновременно равенства $\dfrac{(x^2+1)^2}{x^2}+\dfrac{(y^2+1)^2}{y^2}=\dfrac{50z}{4+z^2}$ и $x+y=1$.

**10.** Все ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равны $b$. Высота правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна высоте указанной пирамиды, основание $ABCD$ у них общее. **(1)** Через точки $A$ и $C_1$ проведена плоскость $\alpha$ параллельно прямой $BD$. Найдите величину площади многоугольника, образовавшегося при пересечении плоскости $\alpha$ и пирамиды $SABCD$. **(2)** Через точки $B$ и $D_1$ проведена плоскость $\beta$. Найдите минимально возможную величину площади многоугольника, образовавшегося при пересечении плоскости $\beta$ и пирамиды $SABCD$.

Межрегиональная многопрофильная олимпиада 2010, второй этап
Вариант 1
Задания 1-10
Методика проверки

**1.** Найдите значение параметра $p$, при котором сумма квадратов всех различных корней уравнения $(\star)$ $x^3-(p+2)x^2+4px-2xp^2=0$ принимает наименьшее возможное значение.

♦ 2/3

**Решение. (1)** $x^3-(p+2)x^2+4px-2xp^2=0 \Leftrightarrow x\big(x^2-(p+2)x+4p-2p^2\big)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x^2-(p+2)x+4p-2p^2=0. \end{array}\right.$

**(2)** Найдем дискриминант,
$D=(p+2)^2-4(4p-2p^2)=p^2+4p+4-16p+8p^2=9p^2-12p+4=(3p-2)^2$.

**(3)** Найдем корни,
$x_{1,2}=\dfrac{p+2\pm(3p-2)}{2}=\{2p;2-p\}$, $x_3=0$.

**(4)** Заметим, что уравнение $(\star)$ имеет в зависимости от величины параметра $p$ ровно два различных корня (при $p\in\{0;\,2;\,2/3\}$) или ровно три различных корня (при всех остальных значениях $p$).

**(5)** Найдем сумму квадратов всех различных корней при $p\neq 2/3$,
$S=x_1^2+x_2^2+x_3^2=(2p)^2+(2-p)^2=4p^2+4-4p+p^2=5p^2-4p+4=5(p-2/5)^2-4/5+4$
$=5(p-2/5)^2+16/5$, наименьшее значение достигается при $p_1=\dfrac{2}{5}$, и тогда $S=16/5=3{,}2$.

**(6)** Найдем сумму квадратов всех различных корней при $p=2/3$, $p_1=p_2=4/3$, два различных корня равны в этом случае $2/3$ и $0$, $S=16/9=1{,}(7)<3{,}2$, поэтому верный ответ $p=2/3$. ■

**2.** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции
$(\star)$ $f(x)=3\cos^4 x-14\cos^3 x-21\sin^2 x-12\cos x$.

♦ $\{-373/16;\,29\}$

**Решение. (1)** $f(x)=3\cos^4 x-14\cos^3 x-21\sin^2 x-12\cos x$
$=3\cos^4 x-14\cos^3 x-21+21\cos^2 x-12\cos x \Leftrightarrow \begin{cases} t=\cos x, \\ f(x)=3t^4-14t^3-21+21t^2-12t \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} t=\cos x, \\ f(x)=3t^4-14t^3+21t^2-12t-21. \end{cases}$ Так как $\cos x\in[-1;\,1]$, то множество значений функции $(\star)$ совпадает со множеством значений функции
$(\star\star)$ $g(t)=3t^4-14t^3+21t^2-12t-21$
на промежутке $t\in[-1;\,1]$.

**(2)** Пусть сначала функция $(\star\star)$ определена на всей числовой оси. Тогда $g'(t)=12t^3-42t^2+42t-12$
$=12(t^3-1)-42(t^2-t)=12(t-1)(t^2+t+1)-42t(t-1)=6(t-1)\big[2(t^2+t+1)-7t\big]$
$=6(t-1)\big[2t^2+2t+2-7t\big]=6(t-1)\big(2t^2-5t+2\big)$.

**(3)** $2t^2-5t+2=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}$ $t=\dfrac{5\pm\sqrt{9}}{4}$ $t=\dfrac{5\pm3}{4}\in\{-1/2;\,2\}$, поэтому
$g'(t)=6(t-1)(t-2)(2t-1)$. Функция $g(t)$

**(3a)** убывает на промежутке $t\in(-\infty;\,1/2]$,

**(3b)** возрастает на промежутке $t\in[1/2;\,1]$,

**(3c)** убывает на промежутке $t\in[1;\,2]$,

**(3d)** возрастает на промежутке $t\in[2;\,+\infty)$,

(4) Пусть теперь функция $(\star)$определена на промежутке $t\in[-1;\,1]$. Тогда $g(t)$

**(4a)** убывает на промежутке $t\in[-1;\,1/2]$,

**(4b)** возрастает на промежутке $t\in[1/2;\,1]$.

**(5)** Наименьшее значение $g(t)$ совпадает с числом $g(\frac{1}{2})=\dfrac{3}{16}-\dfrac{14}{8}+\dfrac{21}{4}-\dfrac{12}{2}-21$
$=\dfrac{3}{16}-\dfrac{28}{16}+\dfrac{84}{16}-6-21=\dfrac{3-28+84}{16}-27=\dfrac{59}{16}-27=\dfrac{64-5}{16}-27=-\dfrac{5}{16}+4-27=-23-\dfrac{5}{16}=-\dfrac{373}{16}.$

**(6)** Наибольшее значение $g(t)$ совпадает с большим из двух чисел

**(6a)** $g(-1)=3+14+21+12-21=29$,

**(6b)** $g(1) = 3 - 14 + 21 - 12 - 21 = -23$,
поэтому наибольшее значение равно 29. ■

**3.** Решите неравенство $\log_{0{,}1x^2-1{,}1x+2{,}8} \dfrac{x^3-14x^2+40x}{15} \leqslant 1$.

♦ $x \in (0;1] \bigcup (2;4) \bigcup (10;10{,}5]$.

**Решение. (1)** $\log_{0{,}1x^2-1{,}1x+2{,}8} \dfrac{x^3-14x^2+40x}{15} \leqslant 1$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{x^2-11x+28}{10}} \frac{x^3-14x^2+40x}{15} \leqslant \log_{\frac{x^2-11x+28}{10}} \frac{x^2-11x^2+28}{10} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{x^2-11x+28}{10} > 1, \\ \frac{x^3-14x^2+40x}{15} \leqslant \frac{x^2-11x+28}{10}, \\ \frac{x^3-14x^2+40x}{15} > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < \frac{x^2-11x+28}{10} < 1, \\ \frac{x^3-14x^2+40x}{15} \geqslant \frac{x^2-11x+28}{10}, \\ \frac{x^2-11x+28x}{10} > 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-2)(x-9) > 0, \\ (x-4)(2x^2-23x+21) \leqslant 0, \\ x(x-4)(x-10) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} (x-4)(x-7) > 0, \\ (x-2)(x-9) < 0, \\ (x-4)(2x^2-23x+21) \geqslant 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty;\, 2) \bigcup (9;\, +\infty), \\ x \in (-\infty;\, 1] \bigcup [4;\, 10{,}5], \\ x \in (0;\, 4) \bigcup (10;\, +\infty), \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-\infty;\, 4) \bigcup (7;\, +\infty), \\ x \in (2;\, 9), \\ x \in [1;\, 4] \bigcup [10{,}5;\, +\infty), \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (0;\, 1], \\ x \in (10;\, 10{,}5], \\ x \in (2;\, 4). \end{array}\right. \quad \blacksquare$$

**4.** Для защиты ценного оборудования от непогоды требуется изготовить палатку в форме пирамиды, в основании которой должен лежать прямоугольник, а одно из боковых ребер должно быть перпендикулярно основанию. Найдите наибольший возможный объем палатки при условии, что ни одно из ребер пирамиды не должно быть длиннее 2 метров.

♦ $8/(9\sqrt{3})$.

**Решение. (1)** Пусть в основании лежит прямоугольник, стороoны которого равны $x$ и $y$, а высота равна $z$. Тогда условия задачи равносильны требованию найти такие $x, y, z$, что $\dfrac{xyz}{3} \Rightarrow \max$ при одновременном выполнении условий $0 < x \leqslant 2$, $0 < y \leqslant 2$, $0 < z \leqslant 2$, $0 < \sqrt{x^2+z^2} \leqslant 2$, $0 < \sqrt{y^2+z^2} \leqslant 2$, $0 < \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leqslant 2$. Эта система условий равносильна системе $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $x^2+y^2+z^2 \leqslant 4$.
**(2)** Пусть палатка наибольшего объема имеет высоту, равную $z$. Докажем, что $x = y$. При заданном $z$ условие $\dfrac{xyz}{3} \Rightarrow \max$ равносильно условию $\begin{cases} x > 0,\, y > 0, xy \Rightarrow \max, \\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0,\, y > 0, xy \Rightarrow \max, \\ y^2+y^2 \leqslant 4 - z^2. \end{cases}$ В соответствии с неравенством Коши, $x = y = \sqrt{4-z^2}$.
**(3)** Таким образом, в основании лежит квадрат со стороной $x$. Тогда условия задачи равносильны требованию найти такие $x, z$, что $\dfrac{x^2z}{3} \Rightarrow \max$ при одновременном выполнении условий $0 < x \leqslant 2$, $0 < z \leqslant 2$, $2x^2+z^2 \leqslant 4$, $x = \sqrt{4-z^2}$. Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{(4-z^2)\cdot z}{3}$ и условие $f(z) \Rightarrow \max \Leftrightarrow \dfrac{(4-z^2)\cdot z}{3} \Rightarrow \max \Leftrightarrow (4-z^2)\cdot z \Rightarrow \max \Leftrightarrow 4z - z^3 \Rightarrow \max$. Пусть $g(z) = 4z - z^3$, $g'(z) = 4 - 3z^2$, $4 - 3z^2 = 0$ при $z = 2/\sqrt{3}$. Исследование знака производнлой показывает, что это точка максимума.
**(4)** Таким образом, $x^2+y^2+z^2 = 4$, $3x^2 = 4$, $x = y = z = 2/\sqrt{3}$, $V = x^3/3 = 8/(9\sqrt{3})$. ■

**5.** В начале года предприниматель взял на год кредит в банке $\mathcal{A}$ на 80% требуемой ему суммы под $n$% годовых, остальные деньги занял на год в банке $\mathcal{B}$ под $3n$% годовых. Однако из—за кризиса в конце года расплатиться не смог и ему пришлось продлить договор в каждом банке еще на год, причем банк $\mathcal{A}$ установил ему на второй год $2n$% годовых, а банк $\mathcal{B}$ установил $4n$% годовых. В результате он вернул через два года всего 1440 у.е., в то время как планировал вернуть через год 960 у.е. Найдите величину вклада и банковский процент в каждом банке.

♦ В соответствии с условиями задачи, возможно два верных ответа. **(1)** В первый год 600 у.е. и 20%, 150 у.е. и 60%. **(2)** В первый год 544 у.е. и 500/17%, 136 у.е. и 1500/17%.

**Решение 1.** Решим задачу в предположении, что просроченные выплаты процентов по кредиту капитализируются, т.е. неуплаченные проценты прибавляются к основной сумме долга. Пусть вся сумма кредита равна $5m$ и $x = n/100$. Тогда полный долг по состоянию на окончание первого года равен $4m(1+x) + m(1+3x)$. В соответствии с условием задачи, $4m(1+x) + m(1+3x) = 960$. Эта величина рассматривается как сумма кредита на второй год. Тогда полный долг по состоянию на окончание второго года равен $4m(1+x)(1+2x) + m(1+3x)(1+4x)$. В соответствии с условием задачи, $4m(1+x)(1+2x) + m(1+3x)(1+4x) = 1440$. Решая систему $\begin{cases} m > 0,\ x > 0, \\ 4m(1+x) + m(1+3x) = 960, \\ 4m(1+x)(1+2x) + m(1+3x)(1+4x) = 1440 \end{cases}$ методом исключения, получим единственное решение $m = 150$, $x = 0{,}2$. ■

**Решение 2.** Решим задачу в предположении, что просроченные выплаты процентов по кредиту не капитализируются, т.е. неуплаченные проценты не прибавляются к основной сумме долга. Пусть вся сумма кредита равна $5m$ и $x = n/100$. Тогда полный долг по состоянию на окончание первого года равен $4m(1+x) + m(1+3x)$. В соответствии с условием задачи, $4m(1+x) + m(1+3x) = 960$. Полный долг по состоянию на окончание второго года равен $4m(1+x+2x) + m(1+3x+4x)$. В соответствии с условием задачи, $4m(1+x+2x) + m(1+3x+4x) = 1440$. Решая систему $\begin{cases} m > 0,\ x > 0, \\ 4m(1+x) + m(1+3x) = 960, \\ 4m(1+3x) + m(1+7x) = 1440, \end{cases}$ методом исключения, получим единственное решение $m = 136$, $x = 5/17$. ■

**6.** Найдите все значения параметров $p$ и $q$, при которых система $\begin{cases} y = px^2 - q, \\ 2y + \big||6x| - 3|y|\big| = 12 \end{cases}$ имеет ровно три решения.

♦ $\begin{cases} q = -12/5, \\ p \in (-\infty;\ -3/5) \bigcup [0;\ +\infty); \end{cases}$ $\begin{cases} q = 12, \\ p \in (-\infty;\ -1/40) \bigcup [0;\ 2) \bigcup (3;\ +\infty). \end{cases}$

**Решение.** **(1)** Множество точек на плоскости $2y + \big||6x| - 3|y|\big| = 12$ симметрично относительно оси $Oy$. Нарисуем его правую половину,

$$(\star)\quad \begin{cases} 2y + \big||6x| - 3|y|\big| = 12, \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y + \big|6x - 3|y|\big| = 12, \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} 2y + |6x - 3y| = 12, \\ y > 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} 2y + |6x - 3y| = 12, \\ 0 < y \leqslant 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} 2y + |6x + 3y| = 12, \\ -2x < y \leqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 2y + |6x + 3y| = 12, \\ y \leqslant -2x, \end{cases} \end{array} \right. \\ x \geqslant 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} y = 6/5x + 12/5, \\ y > 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 6x - 12, \\ 0 < y \leqslant 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -6/5x + 12/5, \\ -2x < y \leqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -6x - 12, \\ y \leqslant -2x, \end{cases} \end{array} \right. \\ x \geqslant 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} y = (6x + 12)/5, \\ 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ 12/5 \leqslant y \leqslant 6, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 6x - 12, \\ 2 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0 \leqslant y \leqslant 6, \end{cases} \\ \begin{cases} y = (-6x + 12)/5, \\ 2 \leqslant x < +\infty, \\ 0 \geqslant y > -\infty, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -6x - 12, \\ 0 \leqslant x < +\infty, \\ -12 \geqslant y > -\infty, \end{cases} \end{array} \right.$$

Таким образом, множество $(\star)$ образовано
отрезком $AB$, где $A(0;\ 12/5)$, $B(3;\ 6)$,
отрезком $BC$, где $B(3;\ 6)$, $C(2;\ 0)$,
полупрямой $\alpha$, начинающейся в точке $C(2;\ 0)$, и проходящей через точку $M(7;\ -6)$,
и полупрямой $\beta$, начинающейся в точке $D(-12;\ 0)$, и проходящей через точку $N(3;\ -30)$.

**(2)** Так как требуется нечетное число решений, то одно из них должно соответствовать $x = 0$, поэтому $q \in \{-12/5;\ 12\}$.

**(3)** Пусть $q = -12/5$ и $p \geqslant 0$, так что парабола $y = px^2 - q$ направлена ветвями вверх. Тогда ровно три решения будет **(3а)** или при условии, что парабола $y = px^2 - q$ пересекает отрезок $AB$, $p \in [2/5;\ +\infty)$,

**(3b)** или при условии, что парабола $y = px^2 - q$ пересекает отрезок $BC$, и ее ветви направлены вверх, $p \in [0;\ 2/5]$, $p = 0$ тоже годится, в этом случае $y = px^2 - q$ линейная функция.
**(4)** Пусть $q = -12/5$ и $p < 0$, так что парабола $y = px^2 - q$ направлена ветвями вниз. Тогда ровно три решения будет при условии, что парабола $y = px^2 - q$ проходит ниже точки $C$ и пересекает полупрямую $DN$, $p \in (-\infty;\ -3/5)$.
**(5)** Пусть $q = 12$ и $p \geqslant 0$, так что парабола $y = px^2 - q$ направлена ветвями вверх. Тогда ровно три решения будет **(5a)** или при условии, что парабола $y = px^2 - q$ проходит выше точки $C$ и пересекает отрезок $AB$, $p \in (3;\ +\infty)$, **(5b)** или при условии, что парабола $y = px^2 - q$ проходит ниже точки $B$ и пересекает полупрямую $CM$, $p \in [0;\ 2)$, $p = 0$ тоже годится.
**(6)** Пусть $q = 12$ и $p < 0$, так что парабола $y = px^2 - q$ направлена ветвями вниз. Тогда ровно три решения будет при условии, что парабола $y = px^2 - q$ не имеет общих точек с полупрямой $CM$, и пересекает полупрямую $DN$, $p \in (-\infty;\ -1/40)$. ■

**7.** На стороне $AB$ треугольника $ABC$ взята точка $D$. В треугольнике $ADC$ проведены биссектрисы $AP$ и $CQ$. На стороне $AC$ треугольника $ADC$ взята точка $R$ так, что $PR \perp CQ$. Известно, что биссектриса угла $D$ треугольника $BCD$ перпендикулярна отрезку $PB$, $AB = 18$, $AP = 12$. Найдите $AR$.
⧫ 8.
**Решение.** Пусть $AB = n$, $AP = m$, $AD = c$, $AC = b$, $DP = p$, $CP = q$, $BD = DP = p$, $CP = CR = q$.
Используя свойство биссектрисы и формулу для длины биссектрисы, получим $\begin{cases} \frac{c}{b} = \frac{p}{q}, \\ c + p = AB = n, \\ m^2 = bc - pq, \end{cases}$

$$\begin{cases} c = \frac{bp}{q}, \\ \frac{bp}{q} + p = n, \\ m^2 = b\frac{bp}{q} - pq, \end{cases} \begin{cases} c = \frac{bp}{q}, \\ bp + pq = qn, \\ m^2 = b\frac{bp}{q} - pq, \end{cases} \begin{cases} c = \frac{bp}{q}, \\ p = \frac{qn}{b+q}, \\ m^2 = b\frac{b}{q}\frac{qn}{b+q} - q\frac{qn}{b+q}, \end{cases} \quad m^2 = \frac{b^2 n}{b+q} - \frac{q^2 n}{b+q},\ m^2 = \frac{(b^2 - q^2)n}{b+q},$$

$$m^2 = \frac{(b-q)(b+q)n}{b+q},\ m^2 = (b-q)n,\ b - q = \frac{m^2}{n},\ b - q = \frac{12^2}{18} = 8. \ ■$$

**8.** Найдите все точки минимума и точки максимума функции $f(x) = (x^2 - 3x - 9) \cdot \sqrt{x^2 - 6x + 9}$.
⧫ $x_{\min} \in \{0;\ 4\}$, $x_{\max} \in \{3\}$.
**Решение. (1)** $(x^2 - 3x - 9) \cdot \sqrt{x^2 - 6x + 9} = (x^2 - 3x - 9) \cdot \sqrt{(x-3)^2} = (x^2 - 3x - 9) \cdot |x - 3|$
$= \begin{cases} -(x^2 - 3x - 9)(x - 3) \text{ при } x \leqslant 3, \\ (x^2 - 3x - 9)(x - 3) \text{ при } x \geqslant 3 \end{cases} = \begin{cases} -(x^3 - 6x^2 + 27) \text{ при } x \leqslant 3, \\ x^3 - 6x^2 + 27 \text{ при } x \geqslant 3. \end{cases}$
**(2)** Пусть $g(x) = x^3 - 6x^2 + 27$. Тогда $g'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$,

- $g'(x) > 0$ на промежутке $x \in (-\infty;\ 0)$,
- $g'(x) < 0$ на промежутке $x \in (0;\ 4)$,
- $g'(x) > 0$ на промежутке $x \in (4;\ +\infty)$.

Поэтому функция $g(x)$

- возрастает на промежутке $x \in (-\infty;\ 0]$,
- убывает на промежутке $x \in [0;\ 4]$,
- возрастает на промежутке $x \in [4;\ +\infty)$.

**(3)** Так как $f(x) = \begin{cases} -g(x) \text{ при } x \leqslant 3, \\ g(x) \text{ при } x \geqslant 3, \end{cases}$ то функция $f(x)$

- убывает на промежутке $x \in (-\infty;\ 0]$,
- возрастает на промежутке $x \in [0;\ 3]$,
- убывает на промежутке $x \in [3;\ 4]$,

- возрастает на промежутке $x \in [4;\ +\infty)$.

Поэтому

- $x = 0$ является точкой минимума,
- $x = 3$ является точкой максимума,
- $x = 4$ является точкой минимума

функции $f(x)$. ■

**9.** Найдите все значения переменных $x > 0$, $y > 0$ такие, что хотя бы при одном значении $z$ верны одновременно равенства $(\star)$ $\dfrac{(x^2+1)^2}{x^2} + \dfrac{(y^2+1)^2}{y^2} = \dfrac{50z}{4+z^2}$ и $(\star\star)$ $x + y = 1$.

♦ $\{(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2})\}$.

**Решение 1.**

**(1)** Пусть $x = (1+t)/2$, $y = (1-t)/2$, $t \in (-1;\ 1)$. Тогда $F = \dfrac{(x^2+1)^2}{x^2} + \dfrac{(y^2+1)^2}{y^2} = \Big(x + \dfrac{1}{x}\Big)^2 + \Big(y + \dfrac{1}{y}\Big)^2$ $= x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2 + y^2 + \dfrac{1}{y^2} + 2 = \dfrac{(1+t)^2}{4} + \dfrac{(1-t)^2}{4} + \dfrac{4}{(1+t)^2} + \dfrac{4}{(1-t)^2} + 4 = \dfrac{2t^2+2}{4} + 4\dfrac{2t^2+2}{(1-t^2)^2} + 4$. Пусть $t^2 = s \in [0;\ 1)$. Тогда $F = \dfrac{s+1}{2} + 8\dfrac{s+1}{(1-s)^2} + 4$. Эта функция возрастает на промежутке $[0;\ 1)$, поэтому ее наименьшее значение достигается при $s = 0$, и это наименьшее значение равно 12,5.

**(2)** Пусть $g(z) = \dfrac{50z}{4+z^2}$. Из условия задачи следует, что $F(x,y) = g(z)$, причем $F > 0$. Поэтому равенство может иметь место только при $z > 0$. При этом условии $g(z) = \dfrac{50}{\frac{4}{z} + z}$. Так как по уже упоминавшемуся неравенству Коши $\dfrac{4}{z} + z \geqslant 2\sqrt{\dfrac{4}{z} \cdot z} = 4$, то $\dfrac{50}{\frac{4}{z} + z} \leqslant \dfrac{50}{4} = 12{,}5$, причем равенство имеет место если и только если $\frac{4}{z} = z > 0 \Leftrightarrow z = 2$.

**(3)** Итак, равенство $(\star)$ равносильно одновременному выполнению условий $\begin{cases} F = g(z), \\ F \geqslant 12{,}5, \\ g(z) \leqslant 12{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} F = 12{,}5, \\ g(z) = 12{,}5, \end{cases}$ причем равенство $F = 12{,}5$ верно если и только если $x = y = 0{,}5$, а равенство $g(z) = 12{,}5$ верно если и только если $z = 2$. ■

**Решение 2.** **(4)** Так как для любых $u$ и $v$ верно неравенство $u^2 - 2uv + v^2 \geqslant 0$, то при тех же условиях $2u^2 - 2uv + 2v^2 \geqslant u^2 + v^2$, $2u^2 + 2v^2 \geqslant u^2 + 2uv + v^2$, $2(u^2+v^2) \geqslant (u+v)^2$, $u^2 + v^2 \geqslant \dfrac{(u+v)^2}{2}$.

**(5)** Пусть $u = \dfrac{(x^2+1)^2}{x^2}$, $v = \dfrac{(y^2+1)^2}{y^2}$, тогда $F = \dfrac{(x^2+1)^2}{x^2} + \dfrac{(y^2+1)^2}{y^2} = u^2 + v^2 \geqslant \dfrac{\Big(x + \dfrac{1}{x} + y + \dfrac{1}{y}\Big)^2}{2}$ $\geqslant \dfrac{(x + y + \dfrac{x+y}{xy})^2}{2}$.

**(6)** Так как $x + y = 1$, то $F \geqslant \dfrac{\Big(1 + \dfrac{1}{xy}\Big)^2}{2}$

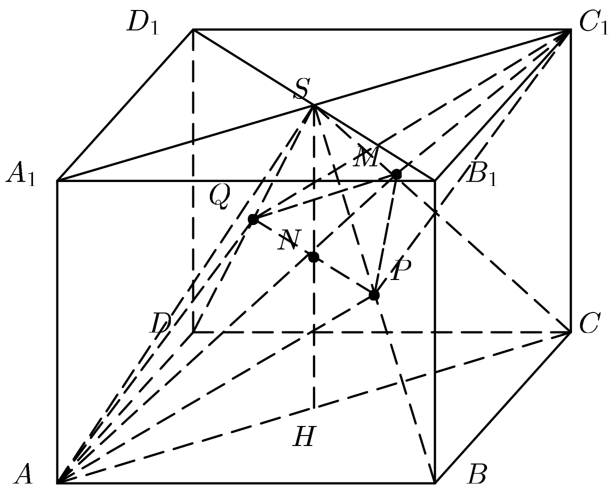
**(7)** Для любых $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ верно неравенство Коши, $\dfrac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$, поэтому при тех же условиях $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$. Так как $x + y = 1$, то $1 \geqslant 2\sqrt{xy}$, $1 \geqslant 4xy$, $xy \leqslant 1/4$. Если к тому же $x > 0, y > 0$, то $\dfrac{1}{xy} \geqslant 4$, $1 + \dfrac{1}{xy} \geqslant 5$, $\Big(1 + \dfrac{1}{xy}\Big)^2 \geqslant 25$, $F \geqslant 12{,}5$. Так как $x + y = 2\sqrt{xy}$ только при $x = y$, то соответственно $F = 12{,}5$ только при $x = y = 0{,}5$.

**(8)** Завершение аналогично решению 1. ■

**10.** Все ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равны $b$. Высота правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна высоте указанной пирамиды, основание $ABCD$ у них общее. **(1)** Через точки $A$ и $C_1$ проведена плоскость $\alpha$ параллельно прямой $BD$. Найдите величину площади многоугольника, образовавшегося при пересечении плоскости $\alpha$ и пирамиды $SABCD$.
**(2)** Через точки $B$ и $D_1$ проведена плоскость $\beta$. Найдите минимально возможную величину площади многоугольника, образовавшегося при пересечении плоскости $\beta$ и пирамиды $SABCD$.

♦ $b^2\sqrt{5}/6$. Эта величина равна также наименьшей площади указанного в условии задачи многоугольника.

**Решение.**




**(1)** $BD = b\sqrt{2}$, $DQ = QS$, $BP = PS$, $PQ \parallel BD$, треугольники $SBD$ и $SPQ$ подобны с коэффициентом подобия $2:1$, $PQ = BD/2 = b/\sqrt{2}$.
**(2)** $AC_1 = b\sqrt{5/2}$, $HN = NS$, $AN = NC_1$, $AN = AC_1/2$, треугольники $SMN$ и $CMC_1$ подобны с коэффициентом подобия $1:2$, $NM = AC_1/6$, $AM = (2/3)AC_1$,
**(3)** $S_{AQC_1P} = \dfrac{1}{2}AM \cdot QP = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot b\sqrt{\dfrac{5}{2}} \cdot b\sqrt{\dfrac{1}{2}} = b^2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \sqrt{\dfrac{5}{4}} = b^2\dfrac{\sqrt{5}}{6}$.
**(4)** Теорема 1. Длина биссектрисы треугольника меньше полусуммы двух прилежащих сторон.
Доказательство. Длина биссектрисы равна $l_c = \sqrt{ab - c_ac_b} = \sqrt{(\sqrt{ab})^2 - c_ac_b} \leqslant \sqrt{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - c_ac_b}$
$= \dfrac{a+b}{2}\sqrt{1 - \dfrac{4c_ac_b}{(a+b)^2}} < \dfrac{a+b}{2}$.
**(5)** Пусть прямая $l_A$ параллельна $BD_1$ и проходит через точку $A$, прямая $l_S$ параллельна $BD_1$ и проходит через точку $S$, прямая $l_C$ параллельна $BD_1$ и проходит через точку $C$. Пусть плоскость $\beta$ проходит через точки $B$, $D_1$ и пересекает $AS$ в точке $E$, пересекает $CS$ в точке $F$, пересекает $SD$ в точке $G$. Пусть прямая $l_E$ параллельна $BD_1$ и проходит через точку $E$, прямая $l_F$ параллельна $BD_1$ и проходит через точку $F$. Тогда площадь многоугольника $BEGF$ равна половине произведения длины отрезка $GB$ на расстояние между прямыми $l_E$ и $l_F$. Из теоремы 1 теперь следует, что наименьшее возможное расстояние между прямыми $l_E$ и $l_F$ имеет место в том и только том случае, когда $EF \parallel AC$.
■