Некоммерческая организация «Ассоциация московских вузов»

Государственное образовательное бюджетное учреждения высшего профессионального образования
«Государственный университет – Высшая школа экономики»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор
_____________ В.В. Радаев
«___»___________ 2010 г.

Отчет:
«Подготовка и проведение Межрегиональной многопрофильной олимпиады школьников ГУ-ВШЭ в 2010 году»

(мероприятие № 49.1.1.3 договора от 01.11.2010 № 49)

Руководитель мероприятия:
Директор Дирекции по профессиональной ориентации и работе с одаренными учащимися Т.А. Протасевич

Москва, 2011

Предметно-методическая комиссия по математике

Богатая Светлана Ивановна	ГУ-ВШЭ, факультет экономики	Доцент каф. высшей математики на факультете экономики
Быков Алексей Александрович - председатель	**ГУ-ВШЭ, факультет экономики**	**Кафедра высшей математики на факультете экономики Профессор**
Шварц Дмитрий Александрович	ГУ-ВШЭ, факультет экономики	Кафедра высшей математики на факультете экономики преподаватель
Игнатов Дмитрий Игоревич	ГУ-ВШЭ, факультет экономики	Кафедра анализа данных и искусственного интеллекта Специалист по учебно-методической работе, Преподаватель
Козин Никита Евгеньевич	ГУ-ВШЭ, факультет экономики	Кафедра высшей математики на факультете экономики Старший преподаватель
Погорельский Кирилл Болеславович	ГУ-ВШЭ, факультет экономики	Кафедра высшей математики на факультете экономики. Преподаватель.
Сухинов Антон Александрович	ГУ-ВШЭ, факультет экономики	Кафедра анализа данных и искусственного интеллекта Старший преподаватель
Кравцова Ольга Вадимовна	СФУ	К.ф.-м.н., доцент кафедры "Высшая математика-2" Института фундаментальной подготовки
Ландо Сергей Константинович	**ГУ-ВШЭ, факультет Математики**	**Декан ф-та математики, Кафедра дискретной математики: заведующий кафедрой - председатель**
Артамкин Игорь Вадимович	**ГУ-ВШЭ, факультет Математики**	**Кафедра дискретной математики Профессор**
Зыкин Алексей Иванович	ГУ-ВШЭ, факультет Математики	Кафедра дискретной математики Доцент
Рыбников Григорий Леонидович	ГУ-ВШЭ, факультет Математики	Кафедра геометрии и топологии Доцент
Тиморин Владлен Анатольевич	ГУ-ВШЭ, факультет Математики	Кафедра геометрии и топологии Доцент
Кравцова Ольга Вадимовна	СФУ	К.ф.-м.н., доцент кафедры "Высшая математика-2" Института фундаментальной подготовки
Лисица Андрей Юрьевич	РУДН, Факультет физико-математических и естественных наук	Кафедра математического анализа и теории функций старший преподаватель
Соколов Борис Васильевич	ТГУ, механико-математический факультет	к.ф-м.н, доцент механико-математического факультета
Турилова Екатерина Александровна	КазГУ	Доцент каф. мат. Статистики, к.ф.-м.н.
Киясов Сергей Николаевич	КазГУ	доцент каф. дифференциальных уравнений, к.ф.-м.н.

Рекомендуемая литература

На сайте http://www.mccme.ru/free-books/ имеются в открытом доступе следующие полезные книги:
В. О. Бугаенко. «Математический кружок. 9 класс»
Р. К. Гордин. «Это должен знать каждый матшкольник»
В. В. Прасолов. «Задачи по алгебре, арифметике и анализу»
В. В. Прасолов. «Задачи по планиметрии»
«Турниры им. Ломоносова (задачи, решения и др. информация)»

Методические материалы для подготовке к олимпиаде, имеющиеся в открытом доступе:
Задачи Московской Математической Олимпиады и их решения (1935-2009 гг.) на сайте
http://olympiads.mccme.ru/mmo/

Математика для 11 класса

Задания первого тура

Вариант для экономических направлений

Задания A1–A20

При выполнении заданий A1–A20 в бланке ответов найдите номер выполняемого задания и отметьте клеточку, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа, в соответствии с образцом на бланке.

A1 Сколько решений имеет система $\begin{cases} y = x^2 - 3, \\ x^2 + y^2 = 9\,? \end{cases}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ одно $\boxed{\mathbf{2}}$ два $\boxed{\mathbf{3}}$ три $\boxed{\mathbf{4}}$ четыре или больше $\boxed{\mathbf{5}}$ решений нет

A2 Гипербола $y = \dfrac{x-1}{x-7}$ пересекает гиперболу $y = \dfrac{x-7}{x-1}$ в точке $(x;\, y)$, причем значение выражения $x^2 + y^2$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

A3 Если $\dfrac{\sin^3 x - 3\sin^2 x\cos x + 3\sin x\cos^2 x - \cos^3 x}{\sin^3 x + 3\sin^2 x\cos x + 3\sin x\cos^2 x + \cos^3 x} = -\dfrac{1}{27}$, то значение $\operatorname{tg} x$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ 3 $\boxed{\mathbf{2}}$ $\dfrac{1}{3}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ 2 $\boxed{\mathbf{4}}$ $\dfrac{1}{2}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $-\dfrac{1}{3}$

A4 Больший корень уравнения $x^2 + 6x + 5 = 0$ равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ $-\dfrac{1}{5}$ $\boxed{\mathbf{3}}$ 5 $\boxed{\mathbf{4}}$ -1 $\boxed{\mathbf{5}}$ -5

A5 Наибольшее значение функции $f(x) = 14x - x^2 - 44$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 5

A6 Сколько различных целочисленных решений имеет неравенство $\left(x^2 - 11x + 28\right)\left(x - 6\sqrt{x} + 8\right) \leqslant 0$? Укажите остаток от деления этого числа на 5.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

A7 Билл добавил в копилку 30 у.е., в результате чего сумма в копилке возросла на 20%. Сколько у.е. нужно добавить в копилку после этого, чтобы сумма в копилке в результате второго вклада возросла еще на 20%?

$\boxed{\mathbf{1}}$ 30 $\boxed{\mathbf{2}}$ 32 $\boxed{\mathbf{3}}$ 36 $\boxed{\mathbf{4}}$ 48 $\boxed{\mathbf{5}}$ 42

A8 Если годовая процентная ставка в банке равна 700% при условии ежемесячного начисления процентов, то вклад 1000 руб., сделанный в начале года, через 4 месяца составит сумму (в рублях, укажите наиболее точное значение)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 5600 $\boxed{\mathbf{2}}$ 4000 $\boxed{\mathbf{3}}$ 2800 $\boxed{\mathbf{4}}$ 2000 $\boxed{\mathbf{5}}$ 1400

A9 Наименьший положительный корень уравнения $\sin\dfrac{x}{6} = \dfrac{1}{2}$ равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ π $\boxed{\mathbf{2}}$ 2π $\boxed{\mathbf{3}}$ 3π $\boxed{\mathbf{4}}$ 4π $\boxed{\mathbf{5}}$ 5π

A10 Если число X равно наименьшему положительному корню уравнения $\cos(51x)\cos(81x) = \cos(6x)\cos(24x)$, то значение выражения πX^{-1} равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

A11 Один из корней уравнения $x \cdot 18^x = 2x \cdot 3^{2x}$ принадлежит промежутку

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x \in (0{,}5;\ 1{,}5)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x \in [1{,}5;\ 2{,}5)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $x \in [2{,}5;\ 3{,}5)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $x \in [3{,}5;\ 4{,}5)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $x \in [4{,}5;\ 999)$

A12 Все решения неравенства $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 \leqslant 0$ образуют промежуток, длина которого равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 5

A13 Значение выражения $9\dfrac{\log_8(81) + \log_{16} 9}{\log_4(27)}$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

A14 Наименьший (или единственный) корень уравнения $\log_8(x-7) + \log_8(x-9) = 1$ равен натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

A15 Произведение всех различных корней уравнения $\Big(\big(\log_2 x\big)^2 - 5\log_2 x + 1\Big) \cdot \Big(\big(\log_2 x\big)^2 - 5\log_2 x + 7\Big) = -9$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

A16 Производная функции $f(x) = 2008x^{2007} - 2007x^{2008}$ в точке $x = 1$ равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ -1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 1 $\boxed{\mathbf{3}}$ 2008 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4015 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

A17 Касательная к параболе $y = \dfrac{x^2}{2}$, проведенная через точку этой параболы с абсциссой $x = 18$, пересекает ось абсцисс в точке, абсцисса которой равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

A18 Если число $L = |b - a|$ равно расстоянию на числовой оси между абсциссой точки минимума $x = a$ и абсциссой точки максимума $x = b$ функции $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x$, то

$\boxed{\mathbf{1}}$ $L \in (0;\ 1{,}5)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $L \in [1{,}5;\ 2{,}5)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $L \in [2{,}5;\ 3{,}5)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $L \in [3{,}5;\ 4{,}5)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $L \in [4{,}5;\ 999)$

A19 Сумма всех различных значений параметра p, при которых уравнение $\dfrac{(x-4)(x-p)}{x^2 - 10x + 21} = 0$ имеет ровно один корень, равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

A20 Основания трапеции равны 24 и 8. Боковые стороны отсекают от прямой, параллельной основанию, отрезок MN, длина которого равна 18. Длина меньшего из отрезков, на которые рассекают диагонали трапеции отрезок MN, равна x. Укажите верное утверждение.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x \in (0;\ 1{,}6)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $x \in [1{,}6;\ 2{,}6)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $x \in [2{,}6;\ 3{,}6)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $x \in [3{,}6;\ 4{,}6)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $x \in [4{,}6;\ 999)$

Математика для 11 класса

Задания первого тура

Вариант для экономических направлений

Задания B1–B5

Ответом на задания B1–B5 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус для отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке Единицы измерений, а также символ процента писать не нужно.

B1 Если после совместного выполнения половины работы Билл повысит свою производительность на 30%, а Джек повысит на 20%, то на выполнение всей работы понадобится 81 день. Если же указанное повышение произойдет после истечения 40 дней совместной работы, то на завершение всей работы понадобится еще 40 дней. За сколько дней выполнят они работу с плановой производительностью?

B2 Найдите сумму всех различных значений параметра p, при которых уравнение $(2p^2-62p+1)x^2-2(p-6)x+1=0$ имеет единственный корень.

B3 Условия размещения вклада в паевом фонде таковы, что первые 11 лет вклад уменьшается на $2n\,\%$ в год, последующие 13 лет вклад увеличивается на $4n\,\%$ в год, причем величину $n \in [0;\ 50]$ вы можете выбрать сами. При каком значении n через 24 года прирост вклада будет наибольшим?

B4 Параметры $p>0$, $q>0$, r выбраны так, что система
$\begin{cases} px-24y=18, \\ 6x-qy=16r-3 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений. Найдите наименьшее возможное при этих условиях значение величины p^2+q^2.

B5 Найдите наименьшее значение параметра p, при котором уравнение $x^4-2x^3+(2p-5)x^2+(6-2p)x+p^2-2p=0$ имеет ровно три различных корня.

Математика для 10 класса

Задания A1–A16

При выполнении заданий A1–A16 в бланке ответов найдите номер выполняемого задания и отметьте клеточку, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа, в соответствии с образцом на бланке.

A1 Если число S равно сумме всех различных корней уравнения $4|x| = x + 15$, то

$\boxed{\mathbf{1}}$ $S \in (-999;\ 2,1)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $S \in [2,1;\ 3,2)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $S \in [3,2;\ 4,3)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $S \in [4,3;\ 5,4)$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $S \in [5,4;\ 999)$

A2 Если накладные расходы уменьшить в четыре раза, а прочие расходы увеличить в восемь раз, то общие расходы увеличатся в три раза. Первоначально прочие расходы были меньше накладных на $n\%$, где

$\boxed{\mathbf{1}}$ $n \in (0;\ 20)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $n \in [20;\ 30)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $n \in [30;\ 40)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $n \in [40;\ 50)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $n \in [50;\ 100)$

A3 Если Билл повысит свою производительность труда в 7 раз, а Джек будет работать по плану, то время совместного выполнения работы уменьшится в 5 раз. Плановая производительность труда Билла относится к плановой производительности Джека как

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 : 2 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 : 3 $\boxed{\mathbf{3}}$ 1 : 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 2 : 1 $\boxed{\mathbf{5}}$ 3 : 1

A4 Сумма всех различных корней уравнения $(x-2)(x^2-5x+6) = 0$ равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ 6 $\boxed{\mathbf{2}}$ 7 $\boxed{\mathbf{3}}$ 12 $\boxed{\mathbf{4}}$ 8 $\boxed{\mathbf{5}}$ 5

A5 Полвека назад валовой внутренний продукт (ВВП) Феопии был на 55% больше, чем у Мурундии. С тех пор Феопия увеличила ВВП на 20%, а Мурундия – на 24%. Теперь ВВП Феопии больше ВВП Мурундии на

$\boxed{\mathbf{1}}$ 50% $\boxed{\mathbf{2}}$ 51% $\boxed{\mathbf{3}}$ 52% $\boxed{\mathbf{4}}$ 53% $\boxed{\mathbf{5}}$ 55%

A6 Сумма всех различных значений параметра p, при которых уравнение $\dfrac{x-p}{x^2-2x-15} = 0$ не имеет корней, равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ −1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 15 $\boxed{\mathbf{5}}$ −15

A7 Укажите множество всех значений, которые может принимать величина x при одновременном выполнении условий $4x + 2y = 10$ и $|y-4| \leqslant 3$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $[-1;\ 2]$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $[-1;\ 3]$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[1;\ 3]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[-1;\ 6]$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $[2;\ 6]$

A8 Доход по вкладу в банке в размере 20% начисляется в конце года и прибавляется к сумме вклада. На сколько процентов сумма вклада в конце пятого года больше суммы в конце второго года? Укажите ближайшее к точному ответу значение (в процентах).

$\boxed{\mathbf{1}}$ 44 $\boxed{\mathbf{2}}$ 40 $\boxed{\mathbf{3}}$ 60 $\boxed{\mathbf{4}}$ 73 $\boxed{\mathbf{5}}$ 64

A9 При каких значениях параметра p система уравнений $\begin{cases} (p-3)x + 3y = p+1, \\ x + (p-5)y = p-5 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений?

$\boxed{\mathbf{1}}$ при одном значении параметра p, причем $p \in (-3;\ 3)$

$\boxed{\mathbf{2}}$ при одном значении параметра p, причем $p \in (-\infty;\ -3]$

$\boxed{\mathbf{3}}$ при одном значении параметра p, причем $p \in [3;\ +\infty)$

4 при двух значениях параметра p

5 таких значений параметра p не существует

A10 Три улитки находятся в вершинах равностороннего треугольника ABC со стороной 288 см. Улитка A всегда ползет в сторону улитки B, Улитка B ползет в сторону улитки C, улитка ползет в сторону улитки A, скорость всех улиток постоянна и равна 1 см/сек. Через сколько секунд они встретятся? Укажите остаток от деления ближайшего натурального числа на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

A11 Основания трапеции равны 24 и 8. Боковые стороны отсекают от прямой, параллельной основанию, отрезок MN, длина которого равна 18. Длина меньшего из отрезков, на которые рассекают диагонали трапеции отрезок MN, равна x. Укажите верное утверждение.

1 $x \in (0;\ 1{,}6)$ **2** $x \in [1{,}6;\ 2{,}6)$ **3** $x \in [2{,}6;\ 3{,}6)$ **4** $x \in [3{,}6;\ 4{,}6)$ **5** $x \in [4{,}6;\ 999)$

A12 В треугольнике PQR биссектрисы PM, QN, RK пересекаются в точке O, причем $M \in QR$, $N \in PR$, $K \in PQ$, отношение сторон $QR : PR : PQ = 6 : 7 : 8$. Площадь треугольника PKO равна 70. Найдите площадь треугольника QMO.

A13 Если число S равно сумме всех различных корней уравнения $\sin 2x + 4\cos x = 0$, принадлежащих промежутку $(0;\ 2\pi)$, то

1 $S \in (0;\ 2,1\pi)$ **2** $S \in [2,1\pi;\ 3,1\pi)$ **3** $S \in [3,1\pi;\ 4,1\pi)$ **4** $S \in [4,1\pi;\ 4,9\pi)$
5 $S \in [4,9\pi;\ 999)$

A14 Если число $\mathbf{X}$ равно наименьшему положительному корню уравнения $\sqrt{3}\big(\sin(19x) + \sin(33x)\big) = 2\sin(52x)\cos(7x)$, то значение выражения $\pi \cdot \mathbf{X}^{-1}$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

A15 Пароход и плот отплыли одновременно вниз по течению реки из пункта А в пункт Б, пароход в Б повернул обратно и на пути из Б в А встретил плот, который к этому моменту проплыл $\dfrac{3}{5}$ расстояния АБ. Отношение скоростей парохода в стоячей воде и течения реки равно

1 $\dfrac{7}{3}$ **2** $\dfrac{8}{3}$ **3** $\dfrac{11}{4}$ **4** $\dfrac{10}{3}$ **5** $\dfrac{5}{2}$

A16 Если Билл повысит свою производительность труда в 5 раз, а Джек понизит свою производительность труда в 4 раза против плана, то время совместного выполнения работы уменьшится в 2 раза. Плановая производительность труда Билла относится к плановой производительности Джека как

1 7 : 12 **2** 5 : 7 **3** 11 : 15 **4** 6 : 11 **5** 5 : 12

Математика для 10 класса

Задания B1–B3

Ответом на задания B1–B3 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус для отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке Единицы измерений, а также символ процента писать не нужно.

B1 Билл продавал больших раков по цене 1 у.е. за 2 штуки, Джек продавал маленьких раков по цене 1 у.е. за 3 штуки. Когда у них осталось равное количество раков (в штуках), они попросили Тома продать всех раков по указанным ценам, а сами отправились ловить новых раков, но не поймали ни одного. Ленивый Том смешал всех раков в кучу и стал продавать по 2 у.е. за 5 штук. В результате продажи всех раков Том выручил на 7 у.е. меньше, чем выручили бы Билл и Джек вместе при первоначальных ценах. Сколько раков продал Том? Сколько у.е. прогадал (или выгадал) на этой сделке каждый из участников, если Билл и Джек поделили выручку Тома пополам между собой?

B2 Нечестный перекупщик использовал рычажные весы с неравными "плечами". Покупая муку, он помещал ее на короткий рычаг своих весов, и это позволяло ему получать 13 килограммов истинного веса, оплачивая 12 килограммов. Продавая муку по той же цене за килограмм, он помещал груз на длинный рычаг тех же весов. Благодаря этому он получил 25 динар за день. Сколько заплатил он за муку при ее покупке?

B3 Первый сплав содержит 10% вещества A, 35% вещества B и 55% вещества C, второй содержит 20% вещества A, 60% вещества B и 20% вещества C, третий содержит 30% вещества A, 10% вещества B и 60% вещества C. Требуется из трех сплавов составить новый, в котором содержание вещества A будет равно 15%. В каких пределах будем заключаться процентное содержание вещества C в новом сплаве?

Математика для 11 класса

Задания первого тура

Вариант для математических направлений

Задания B1–B10

Ответом на задания B1–B10 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус для отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке Единицы измерений, а также символ процента писать не нужно.

B1 Если после совместного выполнения половины работы Билл повысит свою производительность на 30%, а Джек повысит на 20%, то на выполнение всей работы понадобится 81 день. Если же указанное повышение произойдет после истечения 40 дней совместной работы, то на завершение всей работы понадобится еще 40 дней. За сколько дней выполнят они работу с плановой производительностью?

B2 Найдите сумму всех различных значений параметра p, при которых уравнение $(2p^2-62p+1)x^2-2(p-6)x+1=0$ имеет единственный корень.

B3 Сколько имеется различных целочисленных значений параметра p, при которых система уравнений $\begin{cases} 2|x|+2|y|=5, \\ 4y=4x^2-p \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения?

B4 Условия размещения вклада в паевом фонде таковы, что первые 11 лет вклад уменьшается на $2n\,\%$ в год, последующие 13 лет вклад увеличивается на $4n\,\%$ в год, причем величину $n \in [0;\ 50]$ вы можете выбрать сами. При каком значении n через 24 года прирост вклада будет наибольшим?

B5 Параметры $p>0$, $q>0$, r выбраны так, что система $\begin{cases} px-24y=18, \\ 6x-qy=16r-3 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений. Найдите наименьшее возможное при этих условиях значение величины p^2+q^2.

B6 Найдите наименьшее значение параметра p, при котором уравнение $x^4-2x^3+(2p-5)x^2+(6-2p)x+p^2-2p=0$ имеет ровно три различных корня.

B7 Найдите сумму квадратов всех различных корней уравнения

$$\log_2\left(x^2-140x+70^2\right)\cdot\log_2(70-x)$$
$$-\Big(5\log_2(70-x)-\log_2\left(x^2+4x+4\right)\Big)\cdot\log_2|x+2|=0.$$

B8 Найдите сумму двух наибольших корней уравнения $32\cos\dfrac{2\pi}{x}\cos\dfrac{4\pi}{x}\cos\dfrac{8\pi}{x}\cos\dfrac{16\pi}{x}\cos\dfrac{32\pi}{x}-\cos\dfrac{62\pi}{x}=0.$

B9 В треугольнике PQR биссектрисы PM, QN, RK пересекаются в точке O, причем $M\in QR$, $N\in PR$, $K\in PQ$, отношение сторон $QR:PR:PQ=6:7:8$. Площадь треугольника PKO равна 70. Найдите площадь треугольника QMO.

B10 Найдите значение параметра $p>0$ такое, что уравнение $81x^2=2x^3+27p$ имеет ровно два различных корня.

Математика для 11 класса
Задания второго тура

Проверяется решение каждой задачи.

Положительная оценка за каждую задачу может быть получена также при неполном решении.

C1 Решите неравенство $\log_{\frac{16-x^2}{12}}\left(|x|-3\right)^2 \geqslant \log_{\sqrt{\frac{16-x^2}{12}}}\left(6x^2+5x+1\right)$.

C2 Диоген, живущий в бочке в виде прямого кругового цилиндра с радиусом r и высотой h, одно из оснований которого лежит на плоской (как он думал) земле, решил соорудить для защиты своего жилища от дождя шатер в виде правильной четырехугольной пирамиды, внутри которой должна поместиться бочка целиком. Каковы должны быть сторона основания и высота пирамиды, чтобы налог на ее строительство был наименьшим, если известно, что величина налога по законам той местности равна объему пирамиды?

C3 В начале года предприниматель положил 3 доли своего капитала в банк $\mathcal{A}$, остальные 4 доли – в банк $\mathcal{B}$. Каждый банк начисляет проценты на вклад в конце года и прибавляет их к сумме вклада. В конце года сумма двух вкладов стала равной 200 у. е., в конце следующего года – 364 у. е. Если бы первоначально 4 доли своего капитала были положены в банк $\mathcal{A}$, а оставшиеся 3 доли – в банк $\mathcal{B}$, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равной 192 у. е. Найдите величину капитала и банковский процент каждого из банков.

C4 Найдите все значения параметра q, при которых найдется по крайней мере одно значение параметра p такое, что система $\begin{cases} 3x^4-12x^3-4x^2y+12xy+y^2 \geqslant 0, \\ |x-p|+|y-q| \leqslant 1 \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

C5 В равнобедренной трапеции $ABCD$, $AB=CD$, известно что $\angle ADB = 60^\circ$. На прямой AD существует по крайней мере одна точка E такая, что $AE=4$, $EC=2\sqrt{3}$. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

C6 Найдите все точки минимума и точки максимума функции $f(x)=\left|x^3-9x^2+15x\right|$.

C7 Найдите наименьшее положительное значение x, при котором найдется такое y, что равенство
$z^2+2\cos^2 x+2y^2+y\cos x-2z\cos x-2yz-\dfrac{9}{16}=0$
будет верным хотя бы при одном значении z.

C8 Высота правильной треугольной пирамиды $SABC$, опущенная из вершины S, равна $2\sqrt{6}$, а высота треугольника ABC, лежащего в основании, равна $3\sqrt{3}$. На ребрах SA, SB, SC соответственно взяты точки M, N, K так, что $MA=2$, $NB=3$, объем пирамиды $SMNK$ равен $\sqrt{18}$. Найдите **(1)** длину бокового ребра пирамиды, **(2)** длину отрезка CK, **(3)** величину угла между плоскостями ABC и MNK, **(4)** наибольший возможный радиус шара, который может быть размещен внутри многогранника $ABCMNK$ (т.е. ни одна точка шара не находится вне указанного многогранника, но некоторые точки шара могут лежать на гранях).

Математика для 10 класса

Задания A1–A16

При выполнении заданий A1–A16 в бланке ответов найдите номер выполняемого задания и отметьте клеточку, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа, в соответствии с образцом на бланке.

A1 Если число S равно сумме всех различных корней уравнения $4|x| = x + 15$, то

$\boxed{\mathbf{1}}$ $S \in (-999;\ 2,1)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $S \in [2,1;\ 3,2)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $S \in [3,2;\ 4,3)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $S \in [4,3;\ 5,4)$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $S \in [5,4;\ 999)$

A2 Если накладные расходы уменьшить в четыре раза, а прочие расходы увеличить в восемь раз, то общие расходы увеличатся в три раза. Первоначально прочие расходы были меньше накладных на $n\%$, где

$\boxed{\mathbf{1}}$ $n \in (0;\ 20)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $n \in [20;\ 30)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $n \in [30;\ 40)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $n \in [40;\ 50)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $n \in [50;\ 100)$

A3 Если Билл повысит свою производительность труда в 7 раз, а Джек будет работать по плану, то время совместного выполнения работы уменьшится в 5 раз. Плановая производительность труда Билла относится к плановой производительности Джека как

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 : 2 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 : 3 $\boxed{\mathbf{3}}$ 1 : 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 2 : 1 $\boxed{\mathbf{5}}$ 3 : 1

A4 Сумма всех различных корней уравнения $(x-2)(x^2-5x+6)=0$ равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ 6 $\boxed{\mathbf{2}}$ 7 $\boxed{\mathbf{3}}$ 12 $\boxed{\mathbf{4}}$ 8 $\boxed{\mathbf{5}}$ 5

A5 Полвека назад валовой внутренний продукт (ВВП) Феопии был на 55% больше, чем у Мурундии. С тех пор Феопия увеличила ВВП на 20%, а Мурундия – на 24%. Теперь ВВП Феопии больше ВВП Мурундии на

$\boxed{\mathbf{1}}$ 50% $\boxed{\mathbf{2}}$ 51% $\boxed{\mathbf{3}}$ 52% $\boxed{\mathbf{4}}$ 53% $\boxed{\mathbf{5}}$ 55%

A6 Сумма всех различных значений параметра p, при которых уравнение $\dfrac{x-p}{x^2-2x-15} = 0$ не имеет корней, равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ -1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 15 $\boxed{\mathbf{5}}$ -15

A7 Укажите множество всех значений, которые может принимать величина x при одновременном выполнении условий $4x + 2y = 10$ и $|y-4| \leqslant 3$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $[-1;\ 2]$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $[-1;\ 3]$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[1;\ 3]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[-1;\ 6]$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $[2;\ 6]$

A8 Доход по вкладу в банке в размере 20% начисляется в конце года и прибавляется к сумме вклада. На сколько процентов сумма вклада в конце пятого года больше суммы в конце второго года? Укажите ближайшее к точному ответу значение (в процентах).

$\boxed{\mathbf{1}}$ 44 $\boxed{\mathbf{2}}$ 40 $\boxed{\mathbf{3}}$ 60 $\boxed{\mathbf{4}}$ 73 $\boxed{\mathbf{5}}$ 64

A9 При каких значениях параметра p система уравнений $\begin{cases}(p-3)x+3y=p+1,\\ x+(p-5)y=p-5\end{cases}$ имеет бесконечное множество решений?

$\boxed{\mathbf{1}}$ при одном значении параметра p, причем $p \in (-3;\ 3)$

$\boxed{\mathbf{2}}$ при одном значении параметра p, причем $p \in (-\infty;\ -3]$

$\boxed{\mathbf{3}}$ при одном значении параметра p, причем $p \in [3;\ +\infty)$

4 при двух значениях параметра p

5 таких значений параметра p не существует

A10 Три улитки находятся в вершинах равностороннего треугольника ABC со стороной 288 см. Улитка A всегда ползет в сторону улитки B, Улитка B ползет в сторону улитки C, улитка ползет в сторону улитки A, скорость всех улиток постоянна и равна 1 см/сек. Через сколько секунд они встретятся? Укажите остаток от деления ближайшего натурального числа на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

A11 Основания трапеции равны 24 и 8. Боковые стороны отсекают от прямой, параллельной основанию, отрезок MN, длина которого равна 18. Длина меньшего из отрезков, на которые рассекают диагонали трапеции отрезок MN, равна x. Укажите верное утверждение.

1 $x \in (0;\ 1{,}6)$ **2** $x \in [1{,}6;\ 2{,}6)$ **3** $x \in [2{,}6;\ 3{,}6)$ **4** $x \in [3{,}6;\ 4{,}6)$ **5** $x \in [4{,}6;\ 999)$

A12 В треугольнике PQR биссектрисы PM, QN, RK пересекаются в точке O, причем $M \in QR$, $N \in PR$, $K \in PQ$, отношение сторон $QR : PR : PQ = 6 : 7 : 8$. Площадь треугольника PKO равна 70. Найдите площадь треугольника QMO.

A13 Если число S равно сумме всех различных корней уравнения $\sin 2x + 4\cos x = 0$, принадлежащих промежутку $(0;\ 2\pi)$, то

1 $S \in (0;\ 2,1\pi)$ **2** $S \in [2,1\pi;\ 3,1\pi)$ **3** $S \in [3,1\pi;\ 4,1\pi)$ **4** $S \in [4,1\pi;\ 4,9\pi)$
5 $S \in [4,9\pi;\ 999)$

A14 Если число $\mathbf{X}$ равно наименьшему положительному корню уравнения $\sqrt{3}\big(\sin(19x) + \sin(33x)\big) = 2\sin(52x)\cos(7x)$, то значение выражения $\pi \cdot \mathbf{X}^{-1}$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

A15 Пароход и плот отплыли одновременно вниз по течению реки из пункта А в пункт Б, пароход в Б повернул обратно и на пути из Б в А встретил плот, который к этому моменту проплыл $\dfrac{3}{5}$ расстояния АБ. Отношение скоростей парохода в стоячей воде и течения реки равно

1 $\dfrac{7}{3}$ **2** $\dfrac{8}{3}$ **3** $\dfrac{11}{4}$ **4** $\dfrac{10}{3}$ **5** $\dfrac{5}{2}$

A16 Если Билл повысит свою производительность труда в 5 раз, а Джек понизит свою производительность труда в 4 раза против плана, то время совместного выполнения работы уменьшится в 2 раза. Плановая производительность труда Билла относится к плановой производительности Джека как

1 7 : 12 **2** 5 : 7 **3** 11 : 15 **4** 6 : 11 **5** 5 : 12

Математика для 10 класса

Задания B1–B3

Ответом на задания B1–B3 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус для отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке Единицы измерений, а также символ процента писать не нужно.

B1 Билл продавал больших раков по цене 1 у.е. за 2 штуки, Джек продавал маленьких раков по цене 1 у.е. за 3 штуки. Когда у них осталось равное количество раков (в штуках), они попросили Тома продать всех раков по указанным ценам, а сами отправились ловить новых раков, но не поймали ни одного. Ленивый Том смешал всех раков в кучу и стал продавать по 2 у.е. за 5 штук. В результате продажи всех раков Том выручил на 7 у.е. меньше, чем выручили бы Билл и Джек вместе при первоначальных ценах. Сколько раков продал Том? Сколько у.е. прогадал (или выгадал) на этой сделке каждый из участников, если Билл и Джек поделили выручку Тома пополам между собой?

B2 Нечестный перекупщик использовал рычажные весы с неравными "плечами". Покупая муку, он помещал ее на короткий рычаг своих весов, и это позволяло ему получать 13 килограммов истинного веса, оплачивая 12 килограммов. Продавая муку по той же цене за килограмм, он помещал груз на длинный рычаг тех же весов. Благодаря этому он получил 25 динар за день. Сколько заплатил он за муку при ее покупке?

B3 Первый сплав содержит 10% вещества A, 35% вещества B и 55% вещества C, второй содержит 20% вещества A, 60% вещества B и 20% вещества C, третий содержит 30% вещества A, 10% вещества B и 60% вещества C. Требуется из трех сплавов составить новый, в котором содержание вещества A будет равно 15%. В каких пределах будем заключаться процентное содержание вещества C в новом сплаве?

Математика для 11 класса

Задания первого тура

Вариант для неэкономических направлений

Задания А1–А20

При выполнении заданий А1–А20 в бланке ответов найдите номер выполняемого задания и отметьте клеточку, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа, в соответствии с образцом на бланке.

А1 Сколько решений имеет система $\begin{cases} y = x^2 - 3, \\ x^2 + y^2 = 9\,? \end{cases}$

$\boxed{1}$ одно $\boxed{2}$ два $\boxed{3}$ три $\boxed{4}$ четыре или больше $\boxed{5}$ решений нет

А2 Больший корень уравнения $x^2 + 6x + 5 = 0$ равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ $-\dfrac{1}{5}$ $\boxed{3}$ 5 $\boxed{4}$ -1 $\boxed{5}$ -5

А3 Билл добавил в копилку 30 у.е., в результате чего сумма в копилке возросла на 20%. Сколько у.е. нужно добавить в копилку после этого, чтобы сумма в копилке в результате второго вклада возросла еще на 20%?

$\boxed{1}$ 30 $\boxed{2}$ 32 $\boxed{3}$ 36 $\boxed{4}$ 48 $\boxed{5}$ 42

А4 Наименьший положительный корень уравнения $\sin\dfrac{x}{6} = \dfrac{1}{2}$ равен

$\boxed{1}$ π $\boxed{2}$ 2π $\boxed{3}$ 3π $\boxed{4}$ 4π $\boxed{5}$ 5π

А5 Гипербола $y = \dfrac{x-1}{x-7}$ пересекает гиперболу $y = \dfrac{x-7}{x-1}$ в точке $(x; y)$, причем значение выражения $x^2 + y^2$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

А6 Производная функции $f(x) = 2008x^{2007} - 2007x^{2008}$ в точке $x = 1$ равна

$\boxed{1}$ -1 $\boxed{2}$ 1 $\boxed{3}$ 2008 $\boxed{4}$ 4015 $\boxed{5}$ 0

А7 Единственный корень уравнения $x \cdot 6^3 = 12^4$ равен натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

А8 Касательная к параболе $y = \dfrac{x^2}{2}$, проведенная через точку этой параболы с абсциссой $x = 18$, пересекает ось абсцисс в точке, абсцисса которой равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{3}$ 3 $\boxed{4}$ 4 $\boxed{5}$ 0

А9 Сколько целых чисел содержится в области определения функции $f(x) = \dfrac{x^2 + 7x + 12}{\sqrt{-x^2 + 7x - 12}}$?

$\boxed{1}$ одно или ни одного $\boxed{2}$ два $\boxed{3}$ три $\boxed{4}$ четыре $\boxed{5}$ пять или больше пяти

A10 Сумма всех различных значений параметра p, при которых уравнение $\dfrac{(x-4)(x-p)}{x^2-10x+21}=0$ имеет ровно один корень, равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

A11 Наибольшее значение функции $f(x)=14x-x^2-44$ равно

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 5

A12 Значение выражения $27^{\log_{81}16}$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

A13 Сколько различных целочисленных решений имеет неравенство $\left(x^2-11x+28\right)\left(x-6\sqrt{x}+8\right)\leqslant 0$? Укажите остаток от деления этого числа на 5.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

A14 Если число $L=|b-a|$ равно расстоянию на числовой оси между абсциссой точки минимума $x=a$ и абсциссой точки максимума $x=b$ функции $f(x)=x^3-9x^2+15x$, то

$\boxed{\mathbf{1}}$ $L\in(0;\ 1{,}5)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $L\in[1{,}5;\ 2{,}5)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $L\in[2{,}5;\ 3{,}5)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $L\in[3{,}5;\ 4{,}5)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $L\in[4{,}5;\ 999)$

A15 Если годовая процентная ставка в банке равна 700% при условии ежемесячного начисления процентов, то вклад 1000 руб., сделанный в начале года, через 4 месяца составит сумму (в рублях, укажите наиболее точное значение)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 5600 $\boxed{\mathbf{2}}$ 4000 $\boxed{\mathbf{3}}$ 2800 $\boxed{\mathbf{4}}$ 2000 $\boxed{\mathbf{5}}$ 1400

A16 Наименьший (или единственный) корень уравнения $\log_8(x-7)+\log_8(x-9)=1$ равен натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

A17 Если $f(x)=\dfrac{x^{4/3}-1}{x^{2/3}-1}-x^{2/3}$ и $A=f(27)$, то

$\boxed{\mathbf{1}}$ $A\in(-999;\ 1{,}1)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $A\in[1{,}1;\ 2{,}21)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $A\in[2{,}21;\ 3{,}37)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $A\in[3{,}37;\ 4{,}51)$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $A\in[4{,}51;\ 999)$

A18 Если число p равно наименьшему положительному корню уравнения $\cos(2004\,x)+\cos(1247\,x)=0$, то значение выражения $\dfrac{2\pi}{p}$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

A19 В треугольнике биссектриса угла, образованного сторонами $AB=16$ и $AC=24$, рассекает сторону BC на отрезки, меньший из которых имеет длину 12. Длина большего из этих отрезков равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ 18 $\boxed{\mathbf{2}}$ 14 $\boxed{\mathbf{3}}$ 24 $\boxed{\mathbf{4}}$ 16 $\boxed{\mathbf{5}}$ 20

A20 Произведение всех различных корней уравнения $(x^2-3x+3)^2-12(x^2-3x+3)+35=0$ — натуральное число, остаток от деления которого на 5 равен

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 0

Математика для 11 класса

Задания первого тура

Вариант для неэкономических направлений

Задания B1–B5

Ответом на задания B1–B5 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус для отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке Единицы измерений, а также символ процента писать не нужно.

B1 Найдите наибольшее значение параметра q, при котором найдется хотя бы одно значение параметра p такое, что система $\begin{cases} px + 8y = 42, \\ 2x + py = \ q \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений.

B2 Найдите произведение всех различных корней уравнения $x^{\log_4 x} = 256x^3$.

B3 Найдите произведение всех различных значений параметра p, при которых уравнение $x^2 - 2(p-3)x + 4p - 7 = 0$ имеет ровно один корень.

B4 Предприниматель должен израсходовать в общей сложности 1440 у.е. на закупку оборудования (18 у.е. за одну установку) и наем персонала (12 у.е. за человека в расчете на год), причем его доход равен численно произведению количества установок на численность персонала. Найдите наибольший возможный доход (в у.е.)

B5 Билл и Джек, работая совместно с плановой производительностью, строят один дом за 13 дней. Если Билл повысит свою производительность труда на 40%, а Джек понизит свою производительность труда на 40%, то они вместе построят дом за 10 дней. За сколько дней Джек построит дом, работая в одиночку с плановой производительностью?

Задания C1–C10

Математика для 10 класса

Задания A1–A16

При выполнении заданий A1–A16 в бланке ответов найдите номер выполняемого задания и отметьте клеточку, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа, в соответствии с образцом на бланке.

A1 Если число S равно сумме всех различных корней уравнения $4|x| = x + 15$, то

$\boxed{\mathbf{1}}$ $S \in (-999;\ 2,1)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $S \in [2,1;\ 3,2)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $S \in [3,2;\ 4,3)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $S \in [4,3;\ 5,4)$
$\boxed{\mathbf{5}}$ $S \in [5,4;\ 999)$

A2 Если накладные расходы уменьшить в четыре раза, а прочие расходы увеличить в восемь раз, то общие расходы увеличатся в три раза. Первоначально прочие расходы были меньше накладных на $n\%$, где

$\boxed{\mathbf{1}}$ $n \in (0;\ 20)$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $n \in [20;\ 30)$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $n \in [30;\ 40)$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $n \in [40;\ 50)$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $n \in [50;\ 100)$

A3 Если Билл повысит свою производительность труда в 7 раз, а Джек будет работать по плану, то время совместного выполнения работы уменьшится в 5 раз. Плановая производительность труда Билла относится к плановой производительности Джека как

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 : 2 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 : 3 $\boxed{\mathbf{3}}$ 1 : 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 2 : 1 $\boxed{\mathbf{5}}$ 3 : 1

A4 Сумма всех различных корней уравнения $(x-2)(x^2-5x+6) = 0$ равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ 6 $\boxed{\mathbf{2}}$ 7 $\boxed{\mathbf{3}}$ 12 $\boxed{\mathbf{4}}$ 8 $\boxed{\mathbf{5}}$ 5

A5 Полвека назад валовой внутренний продукт (ВВП) Феопии был на 55% больше, чем у Мурундии. С тех пор Феопия увеличила ВВП на 20%, а Мурундия – на 24%. Теперь ВВП Феопии больше ВВП Мурундии на

$\boxed{\mathbf{1}}$ 50% $\boxed{\mathbf{2}}$ 51% $\boxed{\mathbf{3}}$ 52% $\boxed{\mathbf{4}}$ 53% $\boxed{\mathbf{5}}$ 55%

A6 Сумма всех различных значений параметра p, при которых уравнение $\dfrac{x-p}{x^2-2x-15} = 0$ не имеет корней, равна

$\boxed{\mathbf{1}}$ −1 $\boxed{\mathbf{2}}$ 2 $\boxed{\mathbf{3}}$ 3 $\boxed{\mathbf{4}}$ 15 $\boxed{\mathbf{5}}$ −15

A7 Укажите множество всех значений, которые может принимать величина x при одновременном выполнении условий $4x + 2y = 10$ и $|y - 4| \leqslant 3$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $[-1;\ 2]$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $[-1;\ 3]$ $\boxed{\mathbf{3}}$ $[1;\ 3]$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $[-1;\ 6]$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $[2;\ 6]$

A8 Доход по вкладу в банке в размере 20% начисляется в конце года и прибавляется к сумме вклада. На сколько процентов сумма вклада в конце пятого года больше суммы в конце второго года? Укажите ближайшее к точному ответу значение (в процентах).

$\boxed{\mathbf{1}}$ 44 $\boxed{\mathbf{2}}$ 40 $\boxed{\mathbf{3}}$ 60 $\boxed{\mathbf{4}}$ 73 $\boxed{\mathbf{5}}$ 64

A9 При каких значениях параметра p система уравнений $\begin{cases} (p-3)x + 3y = p + 1, \\ x + (p-5)y = p - 5 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений?

$\boxed{\mathbf{1}}$ при одном значении параметра p, причем $p \in (-3;\ 3)$

$\boxed{\mathbf{2}}$ при одном значении параметра p, причем $p \in (-\infty;\ -3]$

$\boxed{\mathbf{3}}$ при одном значении параметра p, причем $p \in [3;\ +\infty)$

4 при двух значениях параметра p

5 таких значений параметра p не существует

A10 Три улитки находятся в вершинах равностороннего треугольника ABC со стороной 288 см. Улитка A всегда ползет в сторону улитки B, Улитка B ползет в сторону улитки C, улитка ползет в сторону улитки A, скорость всех улиток постоянна и равна 1 см/сек. Через сколько секунд они встретятся? Укажите остаток от деления ближайшего натурального числа на 5.

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

A11 Основания трапеции равны 24 и 8. Боковые стороны отсекают от прямой, параллельной основанию, отрезок MN, длина которого равна 18. Длина меньшего из отрезков, на которые рассекают диагонали трапеции отрезок MN, равна x. Укажите верное утверждение.

1 $x \in (0;\ 1{,}6)$ **2** $x \in [1{,}6;\ 2{,}6)$ **3** $x \in [2{,}6;\ 3{,}6)$ **4** $x \in [3{,}6;\ 4{,}6)$ **5** $x \in [4{,}6;\ 999)$

A12 В треугольнике PQR биссектрисы PM, QN, RK пересекаются в точке O, причем $M \in QR$, $N \in PR$, $K \in PQ$, отношение сторон $QR : PR : PQ = 6 : 7 : 8$. Площадь треугольника PKO равна 70. Найдите площадь треугольника QMO.

A13 Если число S равно сумме всех различных корней уравнения $\sin 2x + 4\cos x = 0$, принадлежащих промежутку $(0;\ 2\pi)$, то

1 $S \in (0;\ 2,1\pi)$ **2** $S \in [2,1\pi;\ 3,1\pi)$ **3** $S \in [3,1\pi;\ 4,1\pi)$ **4** $S \in [4,1\pi;\ 4,9\pi)$
5 $S \in [4,9\pi;\ 999)$

A14 Если число $\mathbf{X}$ равно наименьшему положительному корню уравнения $\sqrt{3}\big(\sin(19x) + \sin(33x)\big) = 2\sin(52x)\cos(7x)$, то значение выражения $\pi \cdot \mathbf{X}^{-1}$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен

1 1 **2** 2 **3** 3 **4** 4 **5** 0

A15 Пароход и плот отплыли одновременно вниз по течению реки из пункта А в пункт Б, пароход в Б повернул обратно и на пути из Б в А встретил плот, который к этому моменту проплыл $\dfrac{3}{5}$ расстояния АБ. Отношение скоростей парохода в стоячей воде и течения реки равно

1 $\dfrac{7}{3}$ **2** $\dfrac{8}{3}$ **3** $\dfrac{11}{4}$ **4** $\dfrac{10}{3}$ **5** $\dfrac{5}{2}$

A16 Если Билл повысит свою производительность труда в 5 раз, а Джек понизит свою производительность труда в 4 раза против плана, то время совместного выполнения работы уменьшится в 2 раза. Плановая производительность труда Билла относится к плановой производительности Джека как

1 7 : 12 **2** 5 : 7 **3** 11 : 15 **4** 6 : 11 **5** 5 : 12

Математика для 10 класса

Задания B1–B3

Ответом на задания B1–B3 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус для отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке Единицы измерений, а также символ процента писать не нужно.

B1 Билл продавал больших раков по цене 1 у.е. за 2 штуки, Джек продавал маленьких раков по цене 1 у.е. за 3 штуки. Когда у них осталось равное количество раков (в штуках), они попросили Тома продать всех раков по указанным ценам, а сами отправились ловить новых раков, но не поймали ни одного. Ленивый Том смешал всех раков в кучу и стал продавать по 2 у.е. за 5 штук. В результате продажи всех раков Том выручил на 7 у.е. меньше, чем выручили бы Билл и Джек вместе при первоначальных ценах. Сколько раков продал Том? Сколько у.е. прогадал (или выгадал) на этой сделке каждый из участников, если Билл и Джек поделили выручку Тома пополам между собой?

B2 Нечестный перекупщик использовал рычажные весы с неравными "плечами". Покупая муку, он помещал ее на короткий рычаг своих весов, и это позволяло ему получать 13 килограммов истинного веса, оплачивая 12 килограммов. Продавая муку по той же цене за килограмм, он помещал груз на длинный рычаг тех же весов. Благодаря этому он получил 25 динар за день. Сколько заплатил он за муку при ее покупке?

B3 Первый сплав содержит 10% вещества A, 35% вещества B и 55% вещества C, второй содержит 20% вещества A, 60% вещества B и 20% вещества C, третий содержит 30% вещества A, 10% вещества B и 60% вещества C. Требуется из трех сплавов составить новый, в котором содержание вещества A будет равно 15%. В каких пределах будем заключаться процентное содержание вещества C в новом сплаве?

Олимпиада ГУ-ВШЭ. Факультет математики.

11 класс. 1 тур. Демонстрационный вариант.

1) Вася и Петя бегают на коньках по кругу с постоянными скоростями. Когда они бегут в одном направлении, Вася догоняет Петю каждые 12 минут, а когда они бегут навстречу друг другу, то встречаются каждые 4 минуты. За сколько минут Вася пробегает круг?
(Ответ: 6)

2) Найдите наибольший общий делитель чисел 8651 и 9073.
(Ответ: 211)

3) Сколькими способами среди вершин данного правильного 18-угольника можно выбрать три так, чтобы образованный ими треугольник был тупоугольным?
(Ответ: 504)

4) Какое максимальное количество точек пересечения — при различных значениях параметра a — могут иметь графики функций $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{5}x + a$?
(Ответ: 5)

5) На какую наибольшую степень двойки делится число
$101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot \ldots \cdot 199 \cdot 200$?
(Ответ: 100)

6) Прямая $y = a$ пересекает график многочлена $y = 8x^3 - 12x + 2x + 6$ в трех точках P, Q, R, считая слева направо. Площадь куска плоскости, ограниченного отрезком PQ снизу и графиком сверху, равна площади куска плоскости, ограниченного отрезком QR сверху и графиком снизу. Чему равно a?
(Ответ: 5)

7) Плоскость замостили одинаковыми правильными шестиугольниками без пропусков и наложений. В одном шестиугольнике написали число 0. Затем во всех шестиугольниках, имеющих с ним общую сторону, написали число 1. Далее во всех пустых шестиугольниках, имеющих общую сторону с теми шестиугольниках, в которых написано число 1, написали число 2. Эту операцию повторили 200 раз: на $N + 1$-ом шаге во всех пустых шестиугольниках, имеющих общую сторону с теми шестиугольниками, в которых написано число

N, написали число $N+1$. В скольких шестиугольниках написано число 100?
(Ответ: 600)

8) На реке с равномерным течением последовательно расположены три пункта А, В, и С. Моторка идет от А до С столько же времени, сколько шляпа плывет от В до С, а рвсстояние от В до С моторка проходит в 12 раз быстрее, чем шляпа плывет от А до В. Найдите отношение расстояний АС/ВС.
(Ответ: 4)

9) Окружность, построенная на диагонали AC трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через вершину B и касается боковой стороны CD. Основания трапеции $AD = 25$ и $BC = 9$. Найти диагональ AC.
(Ответ: 15)

10) Робинзон Крузо гуляет по необитаемому острову, имеющему форму треугольника ABC со сторонами $AB = 9$, $BC = 11$ и $AC = 13$. В каждый момент прогулки он идет параллельно какой-нибудь стороне треугольника; дойдя до берега, Робинзон поворачивает и продолжает идти прямо вглубь острова параллельно другой стороне; дойдя еще раз до берега — опять поворачивает и т.д. Прогулка начинается на стороне AC из точки M, для которой $AM = 5$. Первоначально Робинзон движется параллельно стороне BC; прогшулка заканчивается, когда он вернется в точку M. Найти разность между длиной пути, пройденного Робинзоном параллельно стороне AC и длиной пути, пройденного им параллельно стороне AB.
(Ответ: 4)

Олимпиада ГУ-ВШЭ. Факультет математики.

11 класс. 1 тур. Демонстрационный вариант. Решения.

1. Пусть v_1 — скорость Васи, v_2 — скорость Пети, а l — длина круга. Тогда из первого условия получаем, что $12v_1 = 4v_2 + l$, а из второго $4v_1 + 4v_2 = l$. Таким образом, $24v_1 = 4l$, т. е. Вася пробегает круг за $l/v_1 = 6$ минут.

2. Воспользуемся тем фактом, что НОД$(kb + r, b) =$ НОД(b, r) для целых k, r и b. Отсюда НОД$(8651, 9073) =$ НОД$(422, 8651) =$ НОД$(422, 211) = 211$.

3. Посчитаем сначала число S тупоугольных треугольников с отмеченными вершинами A, B, C. Для первой вершины A имеется 18 вариантов выбора. Пусть вершина B находится на расстоянии n ребер от вершины A. Можно считать, что $n \leq 8$ (иначе любой такой треугольник будет прямоугольным). Число треугольников, у которых угол A тупой равно $8 - n$, число треугольников с тупым углом B равно $8 - n$, а число треугольников с тупым углом C равно $n - 1$. В итоге получаем: $S = 18 \cdot 2 \cdot \sum_{n=1}^{8}(8 - n + 7) = 18 \cdot 2 \cdot (7 \cdot 4 + 8 \cdot 7) = 3024$. Число всевозможных перенумераций вершин треугольника равно 6. Отсюда число тупоугольных треугольников равно 504.

4. Докажем сначала, что число точек пересечения не больше 5. Ввиду нечетности функции $\sin x$ достаточно рассмотреть случай $a \geq 0$. Если графики функций $y = \sin x$ и $y = \frac{x}{5} + a$ имеют общие точки при $x >= 0$, то их не больше двух. Действительно, все они расположены на отрезке $[0, \pi]$, т. к. на остальных промежутках, где $\sin x \geq 0$ имеет место неравенство $\dfrac{1}{5}x + a \geq \dfrac{1}{5}x \geq \dfrac{2}{5}\pi > 1$. При этом на отрезке $[0, \pi]$ точек пересечения не больше двух, ибо функция $\sin x - \frac{x}{5} - a$ имеет на нем два промежутка монотонности. Из аналогичных соображений при $x \leq 0$ число точек пересечения графиков не больше 3-х.
   Для того, чтобы убедиться, что пять точек пересечения бывает, возьмем $a = \frac{7}{11}$. Положим $f(x) = \sin x - \frac{x}{5} - \frac{7}{11}$. Тогда $f(-3\pi) > 0, f(-\frac{7}{3}\pi) < 0, f(-\frac{7}{6}\pi) > 0, f(0) < 0, f(\frac{\pi}{6}) > 0, f(\pi) < 0$. Т. е. $f(x)$ меняет знак не меньше 6-ти раз, поэтому она имеет не менее 5-ти нулей.

5. Для целого числа n обозначим через $\operatorname{ord}_2 n$ максимальную степень двойки, его делящую. Пусть $[x]$ — целая часть вещественного числа x. Несложно видеть, что $\operatorname{ord}_2 n! = [\frac{n}{2}] + [\frac{n}{4}] + [\frac{n}{8}] + \ldots$ (количество чисел от 1 до n, делящихся на 2, плюс количество чисел, делящихся на 4, плюс количество чисел, делящихся на 8 и т.д.). Отсюда $\operatorname{ord}_2(101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot \ldots \cdot 199 \cdot 200) = \operatorname{ord}_2(\frac{200!}{100!}) = \operatorname{ord}_2(200!) - \operatorname{ord}_2(100!) = [\frac{200}{2}] = 100$.

6. Пусть $x_0 < x_1 < x_2$ — корни уравнения $8x^3 - 12x^2 + 2x + 6 - a = 0$. По условию задачи $\int_{x_0}^{x_2} (8x^3 - 12x^2 + 2x + 6 - a)\, dx = 0$. Мы получаем систему уравнений: $8x_0^3 - 12x_0^2 + 2x_0 + 6 - a = 0$, $8x_2^3 - 12x_2^2 + 2x_2 + 6 - a = 0$, $2x_2^4 - 4x_2^3 + x_2^2 + (6 - a)x_2 - (2x_0^4 - 4x_0^3 + x_0^2 + (6 - a)x_0) = 0$. Из нее находим, что $a = 5$.

7. Можно считать, что длины сторон шестиугольников равны 1. Заметим, что центры шестиугольников, в которых написано число N, сами лежат на сторонах правильного шестиугольника S, а все шестиугольнки с числами, меньшими N, лежат внутри S (легко проверяется по индукции). На следующем шаге каждому шестиугольнику с центром на стороне S, но не в вершине соответствует единственный шестиугольник с числом $N + 1$, а шестиугольникам с центрами в вершинах S соответствуют два шестиугольника с числом $N + 1$ внутри. Значит при переходе от N к $N + 1$ число шестиугольников увеличивается на 6. Таким образом, всего получаем 600 шестиугольников с числом 100 внутри.

8. Пусть v_1 - скорость моторки относительно берега, а v_2 - скорость шляпы. Тогда $\frac{AC}{v_1} = \frac{BC}{v_2}$ из первого условия и $12\,\frac{BC}{v_1} = \frac{AB}{v_2}$ из второго. Из этой системы находим, что $\frac{AC}{BC}(\frac{AC}{BC} - 1) = 12$, т. е. $\frac{AC}{BC} = 4$.

9. Треугольники ABC и ACD прямоугольные. При этом $\angle BCA = \angle CAD$. Значит $\cos\angle BCA = \frac{9}{AC} = \frac{AC}{25}$. Отсюда $AC = 15$.

10. Выпишем отношения, в котором стороны треугольника ABC делятся точками пересечения пути Робинзона Крузо с ними. На первом шаге сторона AC делится в отношении $AM/MC = 5/8$. Из условия параллельности пути стороне получаем, что сторона AB делится в том же отношенни. То же верно и для CB. Таким образом, Робинзон Крузо приходит в точку, делящую сторону AC в отношении $8/5$. Если продолжить этот процесс, становится видно, что прогулка закончится при втором пересечении пути со стороной AC. При этом длина пути, параллельного стороне AC равна $(5/13 + 8/13)AC = AC$. Аналогично, длина пути, параллельного стороне AB, равна AB. Значит искомая разность между длинами путей равна 4.

11 класс

В варианте 6 задач, решения всех задач должны быть записаны подробно со всеми вычислениями, объяснениями и доказательствами. Задачи можно решать в любом порядке. Время выполнения задания 5 часов.

1. Можно ли расположить на плоскости 2010 лучей таким образом, чтобы ни через какую точку плоскости не проходило более двух лучей, каждый луч пересекался ровно с двумя другими и любые две точки на любых двух лучах можно было соединить ломаной, целиком содержащейся в объединении этих лучей?

2. Среди всех четверок натуральных чисел (k, l, m, n), $k > l > m > n$, найдите такую, что сумма $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ меньше единицы и ближе всего к ней.

3. С натуральным числом производится следующая операция: отбрасывается самая правая цифра его десятичной записи, после чего к полученному после ее отбрасывания числу прибавляется удвоенная отброшенная цифра. Например: $157 \mapsto 15 + 2 \times 7 = 29$, $5 \mapsto 0 + 2 \times 5 = 10$. Натуральное число называется хорошим, если после многократного применения этой операции получаемое число перестает меняться. Найдите наименьшее 100-значное хорошее число.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AA_1. H — точка пересечения высот треугольника ABC. Известно, что $AH = 3$, $A_1H = 2$, а радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 4. Найдите расстояние от центра этой окружности до H.

5. Пусть x — такое число из интервала $(\pi/2, \pi)$, что

$$\frac{4}{3}\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right) = 1.$$

Докажите, что число

$$\left(\frac{4}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x}\right)$$

целое и найдите его.

6. Через центр сферы радиуса $\sqrt{2}$ проведены 6 прямых, параллельных ребрам некоторого правильного тетраэдра. Точки пересечения этих прямых со сферой являются вершинами выпуклого многогранника. Вычислите объем и площадь поверхности этого многогранника.

Олимпиада 9 класс

1. Известно, что число $a + \frac{1}{a}$ целое. Докажите, что число $a^2 + \frac{1}{a^2}$ – тоже целое.

2. Сколько существует чисел от 1 до 1000000, не являющихся ни полным квадратом, ни полным кубом, ни четвертой степенью?

3. Приведите пример 10 различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из них.

4. На сторонах треугольника взяты точки, делящие стороны в одном и том же отношении (в каком-либо одном направлении обхода). Докажите, что точки пересечения медиан данного треугольника и треугольника, имеющего вершинами точки деления, совпадают.

5. Найдите сумму коэффициентов при нечетных степенях x в многочлене, который получается из выражения $(x^3 - x + 1)^{100}$ в результате раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых.

6. Даны положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите, что если $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq \frac{1}{2}$, то

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n) < 2.$$

Олимпиада 10 класс

7. Сколько существует чисел от 1 до 1000000, не являющихся ни полным квадратом, ни полным кубом, ни четвертой степенью?

8. Найдите сумму коэффициентов при нечетных степенях x в многочлене, который получается из выражения $(x^3 - x + 1)^{100}$ в результате раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых.

9. Даны положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите, что если $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq \frac{1}{2}$, то

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n) < 2.$$

10. В пространстве построена замкнутая ломаная так, что все звенья имеют одинаковую длину и каждые три последовательных звена попарно перпендикулярны. Докажите, что число ее звеньев делится на 6.

11. Докажите, что существует степень тройки, оканчивающаяся на 001.

12. Дана окружность, точка A на ней, и точка M внутри нее. Рассматриваются хорды BC, проходящие через M. Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон треугольников ABC касаются некоторой фиксированной окружности.

Решения задач 9 класса

1. $a^2+\frac{1}{a^2}=(a+\frac{1}{a})^2-2$, а значит – тоже целое.

2. Всего чисел 1000000. Среди них 1000 полных квадратов (квадраты чисел от 1 до 1000) и 100 полных кубов (квадраты чисел от 1 до 1000), но из них 10 являются также полными квадратами (это кубы чисел, являющихся полными квадратами чисел от 1 до 10), поэтому 10 посчитаны дважды. Все четвертые степени являются полными квадратами и, следовательно, уже посчитаны. Таким образом, ответ $1000000-(1000+100-10)=998910$.

3. Например, $1, 2, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384$ (начиная с 3 каждое следующее число вдвое больше предыдущего). В самом деле, сумма всех этих чисел есть $768 = 2\cdot 384 = 4\cdot 192 = 8\cdot 96 = 16\cdot 48 = 32\cdot 24 = 64\cdot 12 = 128\cdot 6 = 256\cdot 3 = 384\cdot 2 = 768\cdot 1$.

4. Пусть A, B, C – вершины треугольника, M – точка пересечения его медиан, а A_1, B_1, C_1 – точки деления сторон BC, CA, AB соответственно. Пусть отношение $\frac{BA_1}{BC}$ равно k. Тогда

$$\overline{MA_1}=\overline{MB}+k(\overline{MC}-\overline{MB})=(1-k)\overline{MB}+k\overline{MC},$$

Аналогично,

$$\overline{MB_1}=(1-k)\overline{MC}+k\overline{MA},$$
$$\overline{MC_1}=(1-k)\overline{MA}+k\overline{MB},$$

Так как M – точка пересечения медиам треугольника ABC, имеем векторное равенство $\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}=0$. Отсюда следует, что

$$\overline{MA_1}+\overline{MB_1}+\overline{MC_1}=(1-k)(\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC})+k(\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC})=0,$$

а значит, M есть точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$.

5. Пусть S – сумма коэффициентов при четных степенях x, а S' – сумма коэффициентов при нечетных степенях x. Сумма всех коэффициентов в многочлене есть его значение в точке $x=1$, поэтому равна $(1^3-1+1)^{100}=1$. Таким образом, $S+S'=1$. Разность $S-S'$ есть значение того же многочлена в точке $x=-1$. Следовательно, $S-S'=((-1)^3-(-1)+1)^{100}=(-1+1+1)^{100}=1$. Отсюда $S=1$.

6. Докажем по индукции более общее утверждение: если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – положительные числа, такие, что $a_1+a_2+\ldots+a_n\le\frac{1}{2}$, то

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)<1+2\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

База индукции: очевидно, что $1+a_1<1+2a_1$.

Шаг индукции: пусть $(1 + a_1)(1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_k) < 1 + 2 \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)$. Домножая обе части неравенства на положительное число $(1 + a_{k+1})$, получаем

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_k)(1 + a_{k+1}) < \\ < 1 + 2 \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) + a_{k+1} + 2 \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)a_k.$$

Так как $a_1 + a_2 + \ldots + a_k < \frac{1}{2}$, то $2 \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)a_{k+1} < a_{k+1}$, а значит,

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_{k+1}) < 1 + 2 \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1}),$$

что и требовалось доказать.

Решения задач 10 класса

7. См. решение задачи 2 для 9 класса.

8. См. решение задачи 5 для 9 класса.

9. См. решение задачи 6 для 9 класса.

10. Пусть $A_0A_1 \ldots A_n$ – наша ломаная ($A_0 = A_n$, так как ломаная замкнута). Введем в пространстве декартову систему координат, оси которой параллельны первым 3 звеньям нашей ломаной, а начало координат в вершине A_0. Тогда каждое звено параллельно какой-нибудь из координатных осей, причем координаты концов этого звена различаются на 1. Таким образом, первая координата точки A_n есть сумма ± 1 по всем звеньям, параллельным оси Ox. Так как ломаная замкнута, эта сумма равна нулю, и, в частности, четна. Следовательно, количество звеньев, параллельных оси Ox четно. Аналогично, количество звеньев, параллельных каждой из осей, четно, а значит n четно. Так как каждые 3 последовательных звена попарно перпендикулярны, то звенья, параллельные каждой из осей встречаются на каждом третьем месте. Значит, n делится также на 3, а следовательно, и на 6.

11. Докажем, что существует степень тройки, дающая остаток 1 при делении на 1000 (это равносильно формулировке задачи). Так как число различных остатков от деления на 1000 конечно, то существуют две степени тройки, дающие одинаковые остатки. Пусть это числа 3^k и 3^l, где $k > l$. Тогда число $3^l(3^{k-l} - 1)$ делится на 1000. Так как 3^l не делится ни на 2, ни на 5, число $3^{k-l} - 1$ также делится на 1000. Это значит, что число 3^{k-l} дает остаток 1 от деления на 1000.

12. Пусть O – центр данной окружности. Радиус окружности, проходящей через середины сторон треугольников ABC, равен половине радиуса исходной окружности, так как треугольник с вершинами в серединах сторон подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Поэтому для всех треугольников ABC этот радиус постоянен. Следовательно, нам достаточно доказать, что центры всех таких окружностей принадлежат одной фиксированной окружности. Так как треугольник с вершинами в серединах сторон переводится в треугольник ABC гомотетией с центром в точке пересечения медиан и коэффициентом -2, то же самое верно и для окружностей, описанных около этих треугольников. Следовательно, центры окружностей, проходящих через середины сторон треугольников ABC получаются из точки O гомотетией с центром в точке пересечения медиан и коэффициентом -2. Поэтому достаточно доказать, что центры гомотетии (т.е. точки пересечения медиан треугольников ABC) лежат на одной окружности. Точка пересечения медиан переводится в середину стороны BC гомотетией с центром в (фиксированной) точке A и коэффициентом $\frac{3}{2}$. Поэтому достаточно доказать, что середины хорд BC лежат на одной окружности. Пусть N – середина хорды BC. Поскольку радиус, проходящий через середину хорды, перпендикулярен ей, угол ONM прямой. Следовательно, точка N лежит на (фиксированной) окружности с диаметром OM, что и требовалось.