9 класс

1. Числа от 1 до 2011 выписаны в ряд в порядке возрастания. Можно ли между ними расставить знаки + и − так, чтобы значение полученного выражения было полным квадратом?

Ответ: Можно.

Решение:

Один из возможных вариантов такой. Разобьем числа от 8 до 2011 на четверки последовательных чисел и расставим перед числами в каждой четверке знаки в такой последовательности: $+--+$. Остальные знаки расставим так: $1+2+3+4-5+6-7$. Тогда сумма в каждой четверке равна 0, а $1+2+3+4-5+6-7=4$, следовательно значение полученного выражения равно 4.

2. Существует ли квадратный трехчлен $f(x)=ax^2+bx+c$ такой, что $f(0)=2011$, $f(2011)=0$, а значения во всех натуральных степенях двойки делятся на 3? (Т.е. $f(2^n)$ делится на 3 при каждом натуральном n.)

Ответ: Существует.

Решение:

Рассмотрим, например, трехчлен $-x^2+2010x+2011$. Если x — натуральная степень двойки, то x^2 при делении на 3 всегда дает остаток 1, поэтому $-x^2+1$ делится на 3, поэтому и $-x^2+2010x+2011$ делится на 3. Отметим, что подходит любой другой квадратный трёхчлен, отличающийся от приведённого на слагаемое $3kx(x-2011)$, где k — целое число.

3. Дан остроугольный треугольник на плоскости. В нем проводится высота. В одном из получившихся треугольников снова проводится высота. Такая операция повторяется 2011 раз: каждый раз проводится высота в каком-нибудь из образовавшихся при предыдущих построениях треугольников. Рассмотрим все прямые, содержащие проведенные высоты. Докажите, что на плоскости можно расположить угол в 30 градусов, не имеющий общих точек ни с одной из этих прямых.

Решение:

Все проведенные прямые будут параллельны сторонам и высотам исходного треугольника, поэтому один из 12 образуемых этими направлениями углов не меньше 30 градусов. Из всех проведённых прямых, параллельных сторонам этого угла, выберем две крайние (прямая крайняя, если все прямые, параллельные ей, лежат по одну сторону от неё) таким образом, чтобы один из углов между крайними прямыми не содержал остальные прямые. Получим новый угол. Прямые других направлений отсекают от него треугольники или не пересекаются с ним. Таким образом, в этом угле можно расположить угол в 30 градусов, не имеющий общих точек ни с одной из проведенных прямых.

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 4$, $DA = 3$. Продолжения сторон AB и CD за точки B и C соответственно пересекаются в точке E. Продолжения сторон AD и BC за точки A и B соответственно пересекаются в точке F. Найдите $AF - BF + BE - CE$.

Ответ: 1.

Решение:

Четырехугольник $ABCD$ — описаннный, так как $AB + CD = BC + AD = 5$. Обозначим точки касания вписанной окружности с отрезками AB, BC, CD, DA через P, Q, R, S соответственно. Тогда $AF - BF + BE - CE = (SF - SA) - (QF - QB) + (PE - PB) - (RE - RC) = -SA + RC$, поскольку $PE = RE$, $SF = QF$ и $QB = PB$. Теперь воспользуемся тем, что $RD = SD$. Получим $RC - SA = (RC + RD) - (SA + SD) = CD - AD = 1$.

5. Натуральные числа p и q таковы, что $\frac{p}{q} < \sqrt{11}$. Всегда ли верно, что

$$\frac{p}{q} + \frac{1}{3pq} < \sqrt{11}?$$

Ответ: Всегда верно.

Решение:

Нужно доказать, что $(\frac{p}{q} + \frac{1}{3pq})^2 < 11$, что равносильно

$$p^2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9p^2} < 11q^2$$

(раскрыли скобки в левой части неравенства и домножили обе части неравенства на положительное число q^2), что равносильно

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{9p^2} < 11q^2 - p^2.$$

Из условия имеем $p^2 < 11q^2$. Поскольку в правой части последнего неравенства стоит целое число, $1 \leqslant 11q^2 - p^2$. Но $\frac{2}{3} + \frac{1}{9p^2} < 1$, а значит $\frac{2}{3} + \frac{1}{9p^2} < 11q^2 - p^2$, что и требовалось.

6. В классе 20 учеников, каждый из которых дружит ровно с шестью одноклассниками. Найдите число таких различных компаний из трех учеников, что в них либо все школьники дружат друг с другом, либо каждый не дружит ни с одним из двух оставшихся.

Ответ: 360.

Решение:

Общее число различных троек учеников равно $C_{20}^{3} = 1140$. Вычислим число троек, не удовлетворяющих условию задачи. Ответом в задаче будет разность общего числа троек и найденного числа, которое мы обозначим через N.

Занумеруем как-нибудь учеников. Рассмотрим упорядоченные тройки учеников (a, b, c), такие что ученик a не дружит с b, а ученик b дружит с c. Нетрудно убедиться, что любая тройка, не удовлетворяющая условию задачи, может быть упорядочена описанным выше способом ровно двумя способами, поэтому число таких троек равно $2N$

Теперь посчитаем число таких упорядоченных троек другим способом. Для каждого ученика найдҷм число таких троек, в которых он занимает центральное место. Это число равно $(20-6-1)\cdot 6 = 13\cdot 6 = 78$. Таким образом, общее число таких упорядоченных троек равно $2N = 78 \cdot 20 = 1560$. Следовательно, $N = 780$ и искомое число равно $1140 - 780 = 360$.

10 класс

1. Числа от 1 до 2011 выписаны в ряд в порядке возрастания. Можно ли между ними расставить знаки + и − так, чтобы значение полученного выражения было полным квадратом?

Ответ: Можно.

Решение:

Один из возможных вариантов такой. Разобьем числа от 8 до 2011 на четверки последовательных чисел и расставим перед числами в каждой четверке знаки в такой последовательности: $+--+$. Остальные знаки расставим так: $1+2+3+4-5+6-7$. Тогда сумма в каждой четверке равна 0, а $1+2+3+4-5+6-7=4$, следовательно значение полученного выражения равно 4.

2. Существует ли квадратный трехчлен $f(x)=ax^2+bx+c$ такой, что $f(0)=2011$, $f(2011)=0$, а значения во всех натуральных степенях двойки делятся на 3? (Т.е. $f(2^n)$ делится на 3 при каждом натуральном n.)

Ответ: Существует.

Решение:

Рассмотрим, например, трехчлен $-x^2+2010x+2011$. Если x — натуральная степень двойки, то x^2 при делении на 3 всегда дает остаток 1, поэтому $-x^2+1$ делится на 3, поэтому и $-x^2+2010x+2011$ делится на 3. Отметим, что подходит любой другой квадратный трёхчлен, отличающийся от приведённого на слагаемое $3kx(x-2011)$, где k — целое число.

3. Дан остроугольный треугольник на плоскости. В нем проводится высота. В одном из получившихся треугольников снова проводится высота. Такая операция повторяется 2011 раз: каждый раз проводится высота в каком-нибудь из образовавшихся при предыдущих построениях треугольников. Рассмотрим все прямые, содержащие проведенные высоты. Докажите, что на плоскости можно расположить угол в 30 градусов, не имеющий общих точек ни с одной из этих прямых.

Решение:

Все проведенные прямые будут параллельны сторонам и высотам исходного треугольника, поэтому один из 12 образуемых этими направлениями углов не меньше 30 градусов. Из всех проведённых прямых, параллельных сторонам этого угла, выберем две крайние (прямая крайняя, если все прямые, параллельные ей, лежат по одну сторону от неё) таким образом, чтобы один из углов между крайними прямыми не содержал остальные прямые. Получим новый угол. Прямые других направлений отсекают от него треугольники или не пересекаются с ним. Таким образом, в этом угле можно расположить угол в 30 градусов, не имеющий общих точек ни с одной из проведенных прямых.

4. На плоскости заданы непересекающиеся квадрат со стороной 2 и круг радиуса 3. Найдите максимальное расстояние между серединами отрезков AB и CD, таких что точки A и C лежат в квадрате, а точки B и D лежат в круге.

Ответ: $\sqrt{2}+3$.

Решение:

Введем на плоскости систему координат. Обозначим через o_1 вектор с концом в центре квадрата, а через o_2 вектор с концом в центре круга. Обозначим через K результат параллельного переноса исходного квадрата в квадрат с центром в начале координат, а через L результат параллельного переноса исходного круга в круг с центром в начале координат. Середины описанных в условии отрезков есть концы векторов

$$\frac{1}{2}(o_1+u+o_2+v),$$

где u есть вектор с концом в K, а v есть вектор с концом в L. Верно и обратное - каждый конец такого вектора является серединой описанного в условии отрезка.

Таким образом, расстояние между серединами описанных в задаче отрезков есть длина вектора

$$\frac{1}{2}(o_1+u+o_2+v)-\frac{1}{2}(o_1+u_1+o_2+v_1),$$

где u, u_1 есть векторы с концами в K, а v, v_1 есть векторы с концами в L. Последний вектор равен

$$\frac{1}{2}(u-u_1)+\frac{1}{2}(v-v_1).$$

Вектор $\frac{1}{2}(u-u_1)$ есть вектор u_2 с концом в K и каждый вектор с концом в K получается таким образом для каких-нибудь u, u_1 с концами в K. Аналогичное утверждение справедливо и для $\frac{1}{2}(v-v_1)$.

Таким образом, ответом в задаче будет максимальная длина вектора

$$u_2 + v_2,$$

где конец u_2 принадлежит K, а конец v_2 принадлежит L.

По неравенству треугольника последняя величина не больше чем сумма половины длины диагонали квадрата и радиуса круга. Легко убедиться, что найдутся два вектора u_2, v_2, на которых эта оценка достигается (они сонаправлены и конец u_2 есть вершина квадрата).

5. Натуральные числа p и q таковы, что $\frac{p}{q} < \sqrt{13}$. Всегда ли верно, что

$$\frac{p}{q} + \frac{1}{3pq} < \sqrt{13}?$$

Ответ: Всегда верно.

Решение:

Нужно доказать, что $(\frac{p}{q} + \frac{1}{3pq})^2 < 13$, что равносильно

$$p^2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9p^2} < 13q^2$$

(раскрыли скобки в левой части неравенства и домножили обе части неравенства на положительное число q^2), что равносильно

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{9p^2} < 13q^2 - p^2.$$

Из условия имеем $p^2 < 13q^2$. Поскольку в правой части последнего неравенства стоит целое число, $1 \leqslant 13q^2 - p^2$. Но $\frac{2}{3} + \frac{1}{9p^2} < 1$, а значит $\frac{2}{3} + \frac{1}{9p^2} < 13q^2 - p^2$, что и требовалось.

6. Две армии А и Б, состоящие соответственно из 800 и 1000 воинов, встретились на поле битвы и договорились воевать "по-рыцарски". Каждому воину дается одна смертельно ядовитая стрела (задетый стрелой мгновенно умирает), и они выстреливают по договору: сначала некоторая часть армии А, потом некоторая часть армии Б, потом еще раз часть армии А, и еще раз часть Б, и всё. Какое минимальное число воинов может остаться в живых?

Ответ: 400.

Решение:

Обозначим через A_1, A_2 и B_1, B_2 число стрел, выпущенных армией А в первый и второй раз и армией Б в первый и второй раз, соответственно. Докажем, что число выживших не может быть меньше, чем 400. Заметим сначала, что число выживших N не может быть меньше чем число вооруженных жертв (то есть число воинов, убитых прежде чем они выпустили свои стрелы). С одной стороны, число вооружённых жертв не меньше чем $\max\{A_1, B_1\}$, поэтому $N \geqslant B_1$. С другой стороны, $N = (1000 - A_1 - A_2) + (800 - B_1 - B_2)$, откуда $N \geqslant 800 - B_1$ (поскольку B_2 заведомо не превышает $(1000 - A_1 - A_2)$). Получаем, что

$$N \geqslant \max\{800 - B_1, B_1\} \geqslant 400.$$

Теперь приведём пример, когда выживет ровно 400 воинов: $A_1 = B_1 = A_2 = 400$, $B_2 = 200$. При этом армия Б первым залпом убивает всех безоружных в армии А, а армия А вторым залпом убивает всех безоружных в армии Б.

11 класс

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \cos(\cos(\cos(x))).$$

Ответ: $\cos(\cos(1))$ и $\cos(1)$.

Решение:

Область значений функции $\cos(\cos(x))$ — это отрезок $[\cos(1), 1]$, причем на этом отрезке функция $\cos(x)$ монотонно убывает. Поэтому наибольшее значение функции f равно $\cos(\cos(1))$, а наименьшее — $\cos(1)$.

2. Существует ли квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ такой, что $f(0) = 2011$, $f(2011) = 0$, а значения во всех натуральных степенях двойки делятся на 3? (Т.е. $f(2^n)$ делится на 3 при каждом натуральном n.)

Ответ: Существует.

Решение:

Рассмотрим, например, трехчлен $-x^2 + 2010x + 2011$. Если x — натуральная степень двойки, то x^2 при делении на 3 всегда дает остаток 1, поэтому $-x^2 + 1$ делится на 3, поэтому и $-x^2 + 2010x + 2011$ делится на 3. Отметим, что подходит любой другой квадратный трёхчлен, отличающийся от приведённого на слагаемое $3kx(x - 2011)$, где k — целое число.

3. Дан остроугольный треугольник на плоскости. В нем проводится высота. В одном из получившихся треугольников снова проводится высота. Такая операция повторяется 2011 раз: каждый раз проводится высота в каком-нибудь из образовавшихся при предыдущих построениях треугольников. Рассмотрим все прямые, содержащие проведенные высоты. Докажите, что на плоскости можно расположить угол в 30 градусов, не имеющий общих точек ни с одной из этих прямых.

Решение:

Все проведенные прямые будут параллельны сторонам и высотам исходного треугольника, поэтому один из 12 образуемых этими направлениями углов не меньше 30 градусов. Из всех проведённых прямых, параллельных сторонам этого угла, выберем две крайние (прямая крайняя, если все прямые, параллельные ей, лежат по одну сторону от неё) таким образом, чтобы один из углов между крайними прямыми не содержал остальные прямые. Получим новый угол. Прямые других направлений отсекают от него треугольники или не пересекаются с ним. Таким образом, в этом угле можно расположить угол в 30 градусов, не имеющий общих точек ни с одной из проведенных прямых.

4. Центры трех шаров с радиусами 1, 2, 3 образуют правильный треугольник со стороной 100500. Найти геометрическое место точек пересечения медиан треугольников ABC таких что точка A лежит в первом шаре, точка B —во втором шаре, а точка C — в третьем шаре.

Ответ: Искомое геометрическое место точек есть шар радиуса 2 с центром в центре данного в задаче правильного треугольника.

Решение:

Рассмотрим произвольную систему координат. Обозначим через o_1, o_2, o_3 векторы с концами в центрах данных в задаче шаров. Пусть точки A, B и C являются концами векторов v_1, v_2 и v_3 соответственно. Тогда точка пересечения медиан является концом вектора

$$\frac{v_1+v_2+v_3}{3}=\frac{o_1+u_1+o_2+u_2+o_3+u_3}{3},$$

где u_1, u_2 и u_3 векторы, концы которых лежат в шаре соответствующего радицса с центром в начале координат.

Вектор $\frac{o_1+o_2+o_3}{3}$ есть вектор с концом в центре правильного треугольника. Вектор $\frac{u_1+u_2+u_3}{3}$ лежит в шаре с центром в начале координат и радиусом $\frac{1+2+3}{3}$ (по неравенству треугольника), и каждый вектор из этого шара равен $\frac{u_1+u_2+u_3}{3}$ для подходящих (можно выбрать пропорциональные) векторов u. Таким образом, наше ГМТ есть сдвинутый на $\frac{1}{3}(o_1+o_2+o_3)$ шар радиуса 2, что мы и хотели показать.

5. Натуральные числа p и q таковы, что $\frac{p}{q}<\sqrt{17}$. Всегда ли верно, что

$$\frac{p}{q}+\frac{1}{3pq}<\sqrt{17}?$$

Ответ: Всегда верно.

Решение:

Нужно доказать, что $(\frac{p}{q}+\frac{1}{3pq})^2<17$, что равносильно

$$p^2+\frac{2}{3}+\frac{1}{9p^2}<17q^2$$

(раскрыли скобки в левой части неравенства и домножили обе части неравенства на положительное число q^2), что равносильно

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{9p^2} < 17q^2 - p^2.$$

Из условия имеем $p^2 < 17q^2$. Поскольку в правой части последнего неравенства стоит целое число, $1 \leqslant 17q^2 - p^2$. Но $\frac{2}{3} + \frac{1}{9p^2} < 1$, а значит $\frac{2}{3} + \frac{1}{9p^2} < 17q^2 - p^2$, что и требовалось.

6. Класс из 20 учеников разделен на две половины так, что каждый школьник из первой половины дружит ровно с шестью одноклассниками, а каждый школьник из второй половины дружит ровно с четырьмя одноклассниками. Найдите число различных компаний из трех учеников таких, что в них либо все школьники дружат друг с другом, либо каждый не дружит ни с одним из двух оставшихся.

Ответ: 450.

Решение:

Общее число различных троек учеников равно $C_{20}^3 = 1140$. Вычислим число троек, не удовлетворяющих условию задачи. Ответом в задаче будет разность общего числа троек и найденного числа, которое мы обозначим через N.

Занумеруем как-нибудь учеников. Рассмотрим упорядоченные тройки учеников (a, b, c), такие что ученик a не дружит с b, а ученик b дружит с c. Нетрудно убедиться, что любая тройка, не удовлетворяющая условию задачи, может быть упорядочена описанным выше способом ровно двумя способами, поэтому число таких троек равно $2N$

Теперь посчитаем число таких упорядоченных троек другим способом. Для данного ученика число таких троек, в которых он занимает центральное место, определяется тем, в какой половине класса он находится. Для ученика из первой половины класса число таких упорядоченных троек, в которых он находится в центре, равно $(20-6-1)\cdot 6 = 13 \cdot 6 = 78$. Для ученика из второй половины класса число таких упорядоченных троек, в которых он находится в центре, равно $(20-4-1)\cdot 4 = 15 \cdot 4 = 60$. Таким образом, число таких упорядоченных троек равно $2N = 78 \cdot 10 + 60 \cdot 10 = 1380$. Следовательно, $N = 690$ и искомое число равно $1140 - 690 = 450$.